Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$ durch die Gleichung $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ und den Graphen von $g$ in der Anlage.

Die Graphen von $f$ und $g$ begrenzen für $1 \leq x \leq 3$ einen See. Der Graph von $f$ bildet modellhaft die nördliche und die zu $g$ gehörende quadratische Parabel die südliche Uferbegrenzungslinie.

Die $x$-Achse verläuft in West-Ost-Richtung. Die Längeneinheit ist 1 km.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $g$. (3P)

[Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$]

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $S_x(1 \mid 0)$ ein gemeinsamer Punkt der Graphen von $f$ und $g$ ist. (4P)
Der Graph der Funktion $f$ schneidet die $x$-Achse in zwei weiteren Punkten. Ermitteln Sie deren Koordinaten.

c) Bestimmen Sie für den Graphen von $f$ die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und deren Art. Für die Koordinaten der Extrempunkte genügen Näherungswerte. (9P)
Zeichnen Sie auf der Grundlage Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen von $f$ in der Anlage ein.

d) Berechnen Sie die Länge des Sees zwischen seinem nördlichsten und seinem südlichsten Punkt in Metern. (6P)
Berechnen Sie die Größe der Seefläche.

e) Westlich des Sees verläuft eine geradlinige Straße durch den Punkt $P(1 \mid 1)$ parallel zur Wendetangente des Graphen von $f$. (14P)
Der Graph von $f$ besitzt genau einen Wendepunkt. Ermitteln Sie dessen Koordinaten und bestimmen Sie eine Gleichung für den Straßenverlauf. Zeichnen Sie diesen in der Anlage ein.

[Kontrollergebnis: $W\left(\frac{4}{3} \mid \frac{20}{27}\right)$]

Berechnen Sie die Entfernung des Wendepunktes von der Straße auf einen Meter genau.

f) Im Punkt $Q(3 \mid 0)$ befinden sich Start und Ziel einer Schwimmveranstaltung. Für die Schwimmveranstaltung soll durch zwei Bojen im See ein 5 km langer Kurs in Form eines gleichseitigen Dreiecks abgesteckt werden, wobei eine der drei Schwimmbahnen in West-Ost-Richtung verläuft. (4P)
Berechnen Sie für den beschriebenen Schwimmkurs die exakten Koordinaten der Bojen.

(40P)

## Anlage zu Aufgabe 1.1: See