a) ▶ **Koordinatengleichung von E** (4P)

Eine Ebene ist durch drei Punkte, in diesem Fall A, B und P eindeutig bestimmt. Die Koordinatengleichung einer Ebene hat allgemein die Form

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$, wobei

- n_1, n_2 und n_3 die Koordinaten des Normalenvektors und
- d ein konstanter Parameter der Gleichung ist.

1. Schritt: Normalenvektor von E

Du kannst nun den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ von E bestimmen, indem du das Kreuzprodukt zweier Vektoren bildest, die in der Ebene E liegen, etwa $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$. Für $\overrightarrow{n}$ folgt daraus:

$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}$.

Den Parameter d kannst du anschließend durch eine Punktprobe mit einem Punkt der Ebene, etwa A, berechnen. Dazu setzt du die Koordinaten von A für x_1, x_2 und x_3 in die Koordinatengleichung ein und löst nach d auf.

Bilde zunächst die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$. Sie stellen jeweils Verbindungsvektoren der zugehörigen Punkte A und B beziehungsweise P dar. Die Koordinaten der Vektoren erhältst du daher durch die Differenz der Ortsvektoren der Punkte:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$

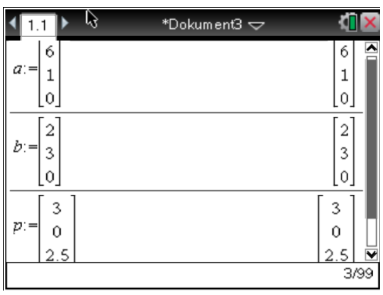
Das Kreuzprodukt der beiden Verbindungsvektoren ist ein Vektor, der senkrecht auf beide steht, er ist damit der Normalenvektor:

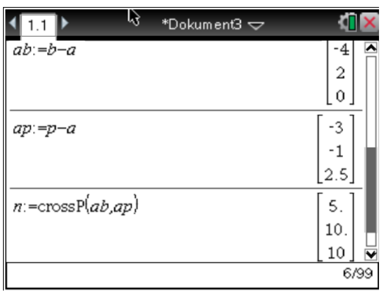
$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}$

Bestimme nun $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{n}$ mit dem CAS-Rechner. Definiere dazu zunächst die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP}$ als a, b und p im Calculator.

Bilde dann die entsprechenden Differenzen, um die beiden Verbindungsvektoren zu ermitteln. Wir wollen diese dann ab und ap nennen.

Ihr Kreuzprodukt kannst du mit dem `crossP`-Befehl bestimmen und als n im Rechner definieren.





Der Normalenvektor lässt sich noch mit dem Faktor 5 kürzen und ergibt dann:

$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Die vorläufige Koordinatengleichung lautet damit:

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d.$

2. Schritt: d bestimmen

Nun kannst du durch eine Punktprobe mit $A(6\,|\,1\,|\,0)$ den Wert für d ermitteln:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= d \\ 6 + 2\cdot 1 + 2\cdot 0 &= d \\ d &= 8 \end{aligned}$$

Die Koordinatengleichung von E lautet damit:

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8.$

▶ Darstellung der Ebene E im Koordinatensystem

Eine Ebene kannst anhand der Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen - den so genannten Spurpunkten - darstellen.

Die Spurpunkte sind Punkte, für die zwei Koordinaten den Wert Null annehmen und nur die Koordinate einen Wert ungleich Null hat, auf der der Spurpunkt liegt, die drei möglichen Spurpunkte haben daher allgemein die Koordinaten:

$S_1(x_1\,|\,0\,|\,0),\qquad S_2(0\,|\,x_2\,|\,0)\qquad \text{und}\qquad S_3(0\,|\,0\,|\,x_3).$

Du kannst also, um etwa den Spurpunkt S_1 auf der x_1-Achse zu erhalten, die x_2- und x_3-Koordinate in der Koordinatengleichung Null setzen und das Ergebnis nach x_1 auflösen:

$$\begin{aligned} x_1 + 2\cdot 0 + 2\cdot 0 &= 8 \\ x_1 &= 8 \end{aligned}$$

Der Spurpunkt S_1 hat damit die Koordinaten:

$S_1(8\,|\,0\,|\,0).$

Verfahre analog mit S_2 und S_3:

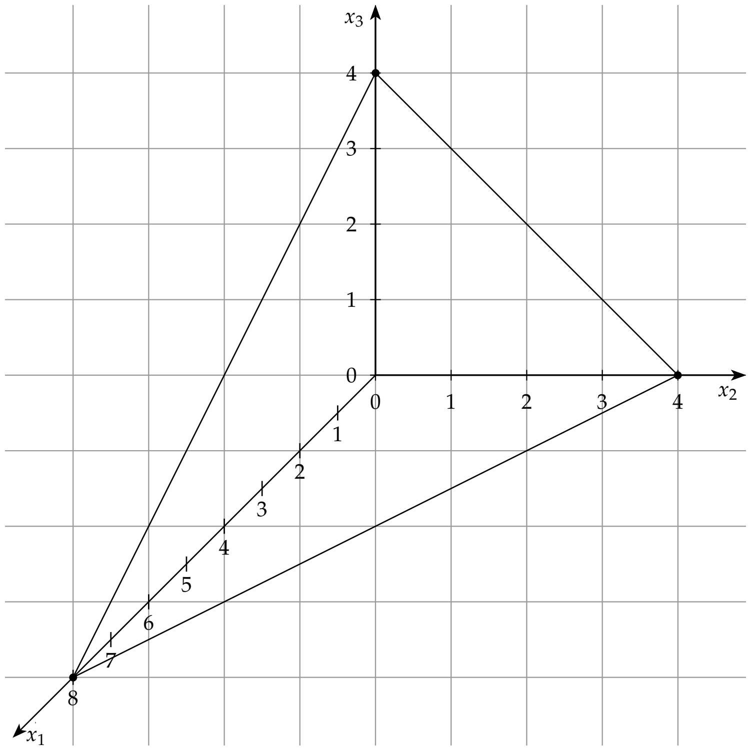
$$\begin{aligned} 0 + 2x_2 + 2\cdot 0 &= 8 \\ 2x_2 &= 8 \qquad |:2 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 + 2\cdot 0 + 2x_3 &= 8 \\ 2x_3 &= 8 \qquad |:2 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Die beiden anderen Spurpunkte haben also die Koordinaten:

$S_2(0\,|\,4\,|\,0)\quad \text{und}\quad S_3(0\,|\,0\,|\,4).$

Zeichne nun diese drei Punkte in ein kartesisches Koordinatensystem und verbinde sie zu einem Dreieck. Das Dreieck stellt dann die gesuchte Ebene dar:



▶ Schnittwinkel von E mit der x_1-Achse

Die x_1-Achse kann als Gerade behandelt werden. Der Winkel, der zwischen Ebene und einer Geraden eingeschlossen ist, wird über den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ und den Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ der Geraden mit der Formel:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$$

bestimmt. Der Normalenvektor der Ebene E ist bekannt und hat die Koordinaten

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ der Geraden, die identisch mit der x_1-Achse ist, hat die x_2- und x_3-Koordinate gleich Null. Der Betrag der x_1-Koordinate ist dann beliebig, da sich der Vektor dann skalieren lässt. Wir können die x_1-Koordinate daher mit $x_1 = 1$ wählen. Für $\overrightarrow{v}$ folgt daraus:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setze die beiden Vektoren nun in die Formel für den Schnittwinkel ein und bestimme α mithilfe des CAS. Definiere zunächst $\overrightarrow{v}$ als v.

Das Skalarprodukt im Zähler gibst du dabei mit `dotp` ein und die Beträge der Vektoren im Nenner mit `norm`. Den Betrag des Skalarprodukts erhältst du dagegen mit `abs`.

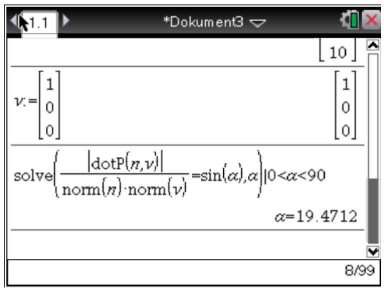
Löse die Gleichung dann mit `solve` nach α auf. Da wir immer den kleineren Winkel suchen, den Achse und Ebene einschließen, grenzen wir α zudem auf

$0 < \alpha < 90$

ein.

Das CAS liefert für α:

$\alpha \approx 19,4712\,°$.



b) ▶ **Nachweis, dass das Dreieck $\triangle ABP$ gleichschenklig ist** (6P)

Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei seiner Seiten gleich lang sind. Die Seitenlängen von $\triangle ABD$ kannst du über die Länge der Verbindungsvektoren, also von $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{BP}$ der einzelnen Seiten berechnen.

Die Länge von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$ sind bekannt und bereits im CAS definiert.

Den Verbindungsvektor $\overrightarrow{BP}$ kannst du über die Differenz der Koordinaten der Endpunkte bestimmen:

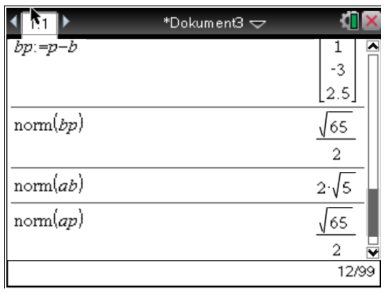
$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}$

Die Länge l eines Vektors kannst du mit dem `norm`-Befehl bestimmen. Hier liefert das CAS:

$\overline{AB} = 2\sqrt{5}$

$\overline{AP} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$

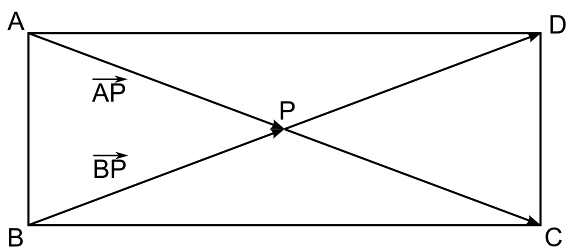
$\overline{BP} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$



Die Seiten AP und BP sind gleich lang, damit ist gezeigt: Das Dreieck $\triangle ABP$ ist gleichschenklig.

▶ **Koordinaten von C und D**

Gesucht sind die Koordinaten der Eckpunkte C und D des Rechtecks $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt in P. Um sich eine Vorstellung eines solchen Dreiecks zu machen, ist eine Skizze sinnvoll:



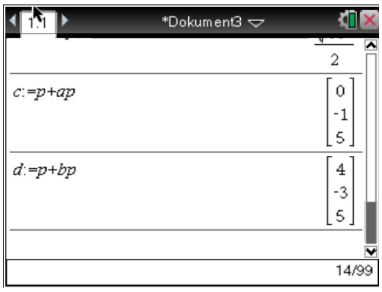
Du kannst erkennen, dass sich die Punkte C und D auf den Gerade durch AP und BP befinden und zwar so, dass man den Vektor $\overrightarrow{AP}$ einmal an P setzen muss beziehungsweise den Vektor $\overrightarrow{BP}$ einmal an P.

Für die Ortsvektoren $\overrightarrow{OD}$ und $\overrightarrow{OC}$ gilt daher:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AP}$ und

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{BP}$.

Berechne die Ausdrücke mithilfe des CAS. Dieses liefert dann:



$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

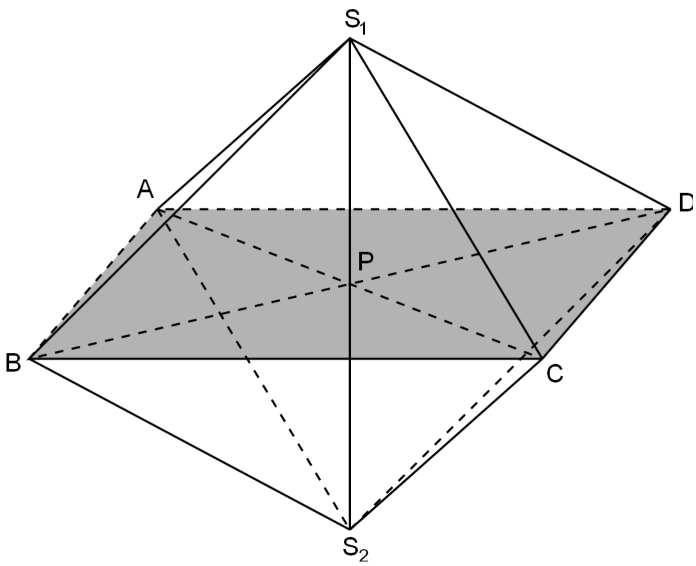
Die Koordinaten von C und D lauten damit:

$C(0 \mid -1 \mid 5)$ und $D(4 \mid -3 \mid 5)$.

▶ Koordinaten der Pyramidenspitzen

Bei einer senkrechten Pyramide befindet sich ihre Spitze senkrecht zur rechteckigen Grundfläche über dem Schnittpunkt der Diagonalen P. In unserem Fall ist der Abstand der Spitze zur Grundfläche in P gleich 12 LE. Es gibt genau zwei Punkte, die senkrecht zur Grundfläche $ABCD$ in 12 LE Abstand über P liegen, da man von der Ebene in zwei Richtungen senkrecht gehen kann.

Eine Skizze verdeutlicht die Situation:



Um die Koordinaten der Spitzen S_1 und S_2 zu ermitteln, müssen wir eine Geraden durch P legen, die senkrecht zur Grundfläche $ABCD$ steht. Der Stützvektor dieser Geraden g ist dann $\overrightarrow{OP}$ und der Richtungsvektor ist der Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene, in der $ABCD$ liegt:

$$g: \quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{n}.$$

Um auf dieser Geraden zu den Spitzen zu gelangen, muss der Richtungsvektor so skaliert werden, dass er genau 1 LE lang ist. Setzt man dann $r = 12$, geht man von P aus 12 LE senkrecht zur Grundfläche zur Spitze S_1. Setzt man $r = -12$, geht man ebenso senkrecht weg, nur in umgekehrer Richtung, so gelangt man zu S_2.

Wir kommen also in zwei Schritten zum Ziel:

1. $\overrightarrow{n}$ auf 1 LE skalieren.
2. Über die Gerade g mit $r = \pm 12$ zu den Schnittpunkten gelangen.

Der Normalenvektor steht senkrecht auf die Grundflächenebene, diese entspricht der zuvor bestimmten Ebene E:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

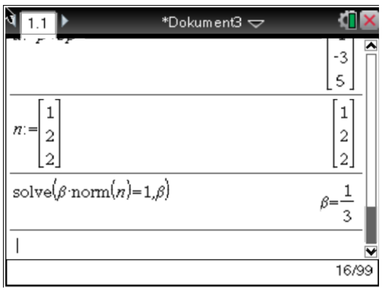
Um diesen Vektor nun auf 1 LE zu skalieren, strecken wir den Vektor mit dem Faktor β:

$$\overrightarrow{n} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Länge des Vektors soll nun gleich 1 LE sein. Der Betrag von $\overrightarrow{n}$ gestreckt mit einem Faktor β soll also 1 ergeben:

$$\beta \cdot \left| \overrightarrow{n} \right| = 1$$

Löse die Gleichung mit dem CAS. Den Betrag von $\overrightarrow{n}$ bestimmst du dabei mit `norm`. Es ergibt sich für β:



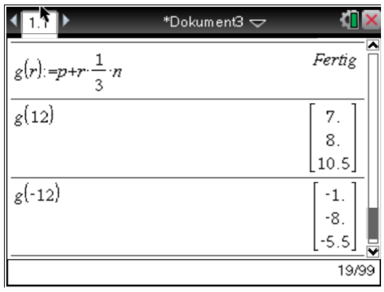
$\beta = \dfrac{1}{3}$. Mit dem resultierenden Wert von β besitzt der Normalenvektor nun die Länge 1 LE:

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für die Geradengleichung von g folgt hieraus:

$$g: \quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{n}.$$

Definiere nun g als Funktion von r in deinem CAS. Wähle dann $r = \pm 12$ und ermittle die Ortsvektoren der Spitzen S_1 und S_2. Das CAS liefert:



$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10{,}5 \end{pmatrix}.$$

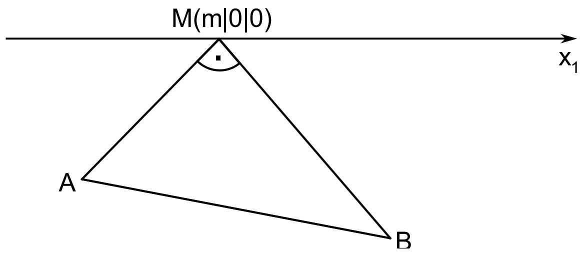
$$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}.$$

Die Spitzen der Pyramiden haben somit die Koordinaten

$S_1(7\,|\,8\,|\,10{,}5)$ und $S_2(-1\,|\,-8\,|\,-5{,}5)$.

c) **► Punkte auf der x_1-Achse, die ein rechtwinkliges Dreieck mit A und B bilden** (3P)

Die Punkte A und B sollen mit bestimmten Punkten auf der x_1-Achse ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB bilden. Der rechte Winkel des Dreiecks liegt daher im Punkt M auf der x_1-Achse. Wegen seiner Lage auf der Koordinatenachse hat M die x_2- und x_3-Koordinate gleich Null. An dieser Stelle ist eine Skizze sinnvoll:



Nun wissen wir, dass wegen des rechten Winkels das Skalarprodukt der Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{BM}$ Null werden muss. Es gilt also:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0.$$

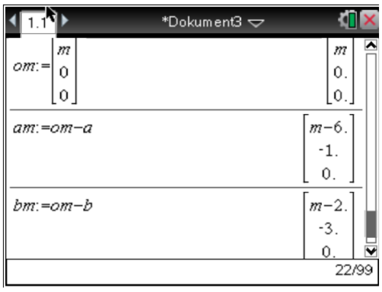
Die einzige Variable in der resultierenden Gleichung ist dann die x_1-Koordinate m von M, nach der die Gleichung aufgelöst werden kann.

Bestimme hierzu zunächst die Koordinaten der beiden Verbidnungsvektoren über die Differenz der Endpunkte.

Definiere dazu zunächst $\overrightarrow{OM}$ als om in deinem CAS. Für die Verbindungsvektoren ergibt sich dann:

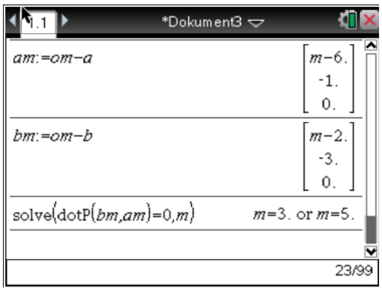
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} m-6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} m-2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Setze die Ergebnisse in das Skalarprodukt ein und löse die resultierende Gleichung mit dem `solve`-Befehl nach n auf. Das Skalarprodukt kannst du dabei mit dem Befehl `dotP` eingeben. Hier liefert das CAS:

$m_1 = 5 \quad \text{und} \quad m_2 = 3.$



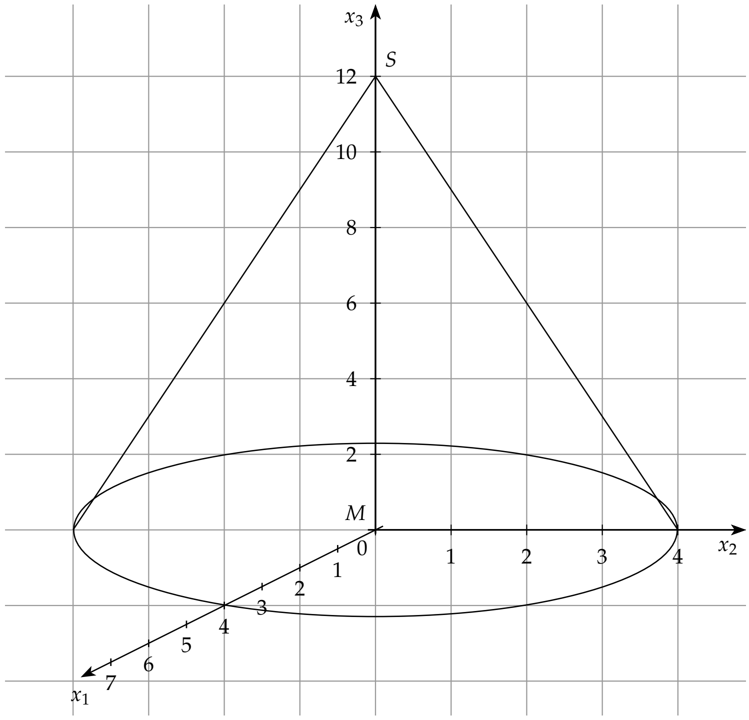
Es ergeben sich zwei Lösungen für m, das heißt es gibt zwei mögliche rechtwinklige Dreiecke mit Hypotenuse AB, bei denen der dritte Punkt auf der x_1-Achse liegt.

Die Koordinaten der gesuchten Punkte lauten damit:

$M_1(5\,|\,0\,|\,0) \qquad \text{und} \qquad M_2(3\,|\,0\,|\,0).$

d) **► Prüfung, ob der Punkt R sich innerhalb des Kegels befindet** (3P)

Es soll untersucht werden, ob der Punkt R innerhalb des beschriebenen Kegels liegt. Der Kegel hat den Grundkreismittelpunkt $M(0\,|\,0\,|\,0)$, er liegt also im Ursprung und seine Spitze befindet sich in $S(0\,|\,0\,|\,12)$, die Höhe des Kegels liegt also auf der x_3-Achse. Zur besseren Vorstellung ist an dieser Stelle eine Skizze eines solchen Kegels mit Grundkreisradius 4 LE sinnvoll:



Es soll nun untersucht werden, ob der Punkt $R(2\,|\,2\,|\,3)$ sich innerhalb oder außerhalb des Kegels befindet. In der Grundfläche des Kegels befinden sich alle Punkte innerhalb des Kegels, die innerhalb der x_1x_2-Ebene liegen und einen Abstand zur x_3-Achse in M kleiner oder gleich 4 haben, die sich also auf einer Kreisfläche rund um den Mittelpunkt bewegen.

Ein Punkt, der oberhalb der x_1x_2-Ebene liegt, befindet sich daher dann im Kegel, wenn sein Abstand zur x_3-Achse kleiner oder gleich dem Radius ist, den der Kegelschnitt in dieser Höhe hat. R hat die x_3-Koordinate

$x_3 = 3.$

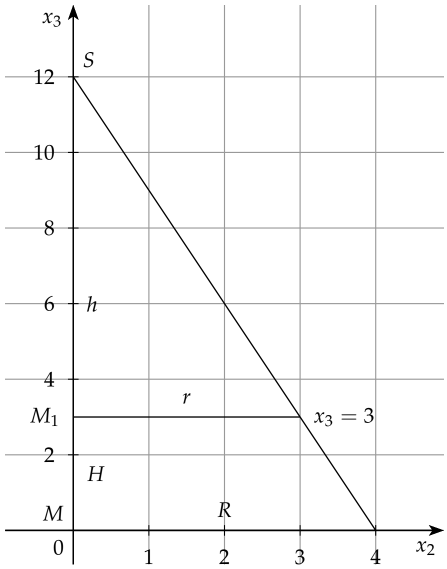
Wir müssen also den Radius r des Kegelschnitts bei $x_3 = 3$ ermitteln und dann prüfen, ob R einen Abstand zur x_3-Achse aufweist, der kleiner oder gleich r ist. Diesen kannst mithilfe des Strahlensatzes bestimmen.

Wir kommen damit in zwei Schritten zum Ziel:

1. Radius r des Kegelschnitts berechnen.
2. Abstand d von R zur x_3-Achse berechnen und mit r vergleichen.

1. Schritt: Radius des Kegelschnitts

Die Projektion einer Kegelhälfte auf die x_2x_3-Achse ergibt ein rechtwinkliges Dreieck. Der Kegelschnitt bei $x_3 = 3$ ist dann die Strecke, die die Projektion parallel zur Grundseite schneidet:



Aus dem Strahlensatz folgt hier:

$$\frac{H}{R} = \frac{h}{r}.$$

Aufgelöst nach dem gesuchten r ergibt sich:

$$r = \frac{R}{H} \cdot h.$$

Daraus folgt durch Einsetzen der gegebenen Werte für $R = 4$, $H = 12$ und $h = 9$:

$$\boldsymbol{r = \frac{4}{12} \cdot 9 = 3}.$$

2. Schritt: Abstand d von R zur x_3-Achse

Der Abstand von R zur x_3-Achse berechnet sich über den Abstand zu $M_1(0\,|\,0\,|\,3)$. Die Koordinaten des Verbindungsvektors ergeben sich zu:

$$\overrightarrow{RM_1} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-2 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Länge d des Vektors folgt mit dem `norm`-Befehl:

$$d = \sqrt{8} \approx 2,8284.$$

Der Abstand des Punktes R von der x_3-Achse ist kleiner als der Radius r des Kegelschnitts in der Höhe $x_3 = 3$. Damit befindet sich R im Kegel.