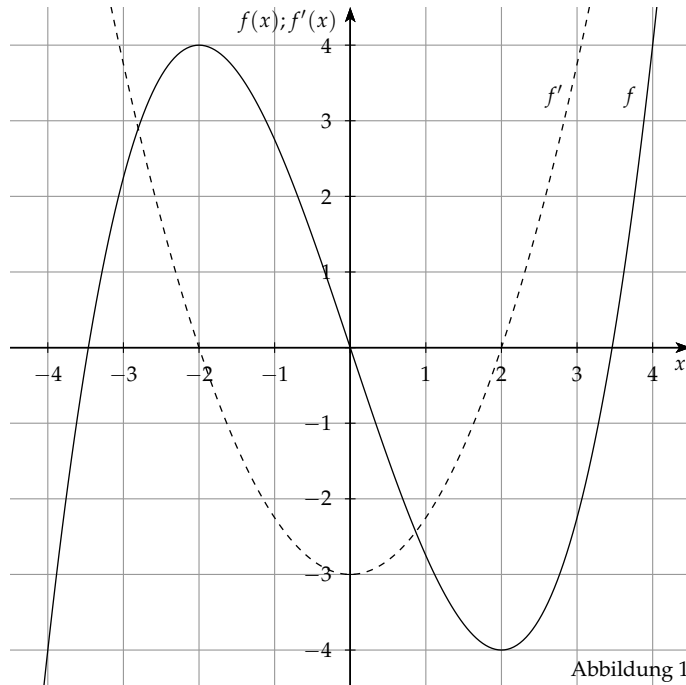


### Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3 - 3 \cdot x.$$

Die Abbildung 1 zeigt die Graphen der Funktion  $f$  und ihrer ersten Ableitung  $f'$ .



- a) Untersuchen Sie anhand des Funktionsterms, ob der Graph der Funktion  $f$  symmetrisch ist. (2 Pkt.)
- b) Aus den Eigenschaften des Graphen der Funktion  $f$  ergeben sich Eigenschaften des Graphen der Funktion  $f'$ . (4 Pkt.)

Geben Sie dafür zwei Beispiele an. Beziehen Sie sich dabei konkret auf Eigenschaften der beiden Graphen in der Abbildung 1.

- c) (1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von  $f$  in  $H(-2 \mid 4)$  einen lokalen Hochpunkt und in  $T(2 \mid -4)$  einen lokalen Tiefpunkt hat. (9 Pkt.)
- (2) Zeichnen Sie in die Abbildung 1 die Gerade ein, die durch die beiden lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion  $f$  verläuft, und bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung dieser Geraden.

[Kontrolllösung: Die Gleichung der Geraden lautet  $g(x) = -2 \cdot x$ .]

- d) Der Graph der Funktion  $f$  hat in zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  Tangenten, die parallel zu der Geraden aus Teilaufgabe c) verlaufen. (7 Pkt.)
- (1) Bestimmen Sie die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  zeichnerisch unter Verwendung des Graphen der Funktion  $f'$  aus der Abbildung 1.  
Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.
- (2) Bestimmen Sie durch eine Rechnung die genauen Koordinaten der Punkte  $P_1$  und  $P_2$ .

- e) (1) Der Graph von  $f$  wird parallel zu den Koordinatenachsen so verschoben, dass der verschobene Graph seinen lokalen Hochpunkt im Ursprung hat. (6 Pkt.)

Zu dem verschobenen Graphen von  $f$  gehört eine der drei folgenden Funktionsgleichungen:

**A**  $f_1(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2$       **B**  $f_2(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2$       **C**  $f_3(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^2$

Überprüfen Sie rechnerisch, um welche Funktionsgleichung es sich handelt.

- (2) Ein Schüler hat die Funktionsgleichung  $g(x) = -2 \cdot x$  (siehe Aufgabenteil c)) unter der Bezeichnung  $g$  in seinem CAS abgespeichert und dann die links im Screenshot (Abbildung 2) dargestellte Eingabe gemacht.

$g(x - 2) - 4 = g(x)$	true
-----------------------	------

Abbildung 2

Erklären Sie anhand der Geraden, die Sie in Abbildung 1 eingezeichnet haben, warum das CAS des Schülers nach dieser Eingabe die Antwort „true“ (also „wahr“) liefert.