Gegeben sind die Funktionen f_b durch

$y = f_b(x) = \dfrac{5}{x} - 5bx$ mit $x \in \mathbb{R}, x \neq 0, b \in \mathbb{R}, b > 0$.

Ihre Graphen seien G_b.

a) Untersuchen Sie die Funktionen f_b auf Nullstellen, Polstellen sowie auf das Verhalten für $x \to \pm\infty$. (15BE)

Weisen Sie die folgenden Eigenschaften nach:

1. Die Funktionen f_b sind monoton fallend,
2. Die Graphen G_b sind punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

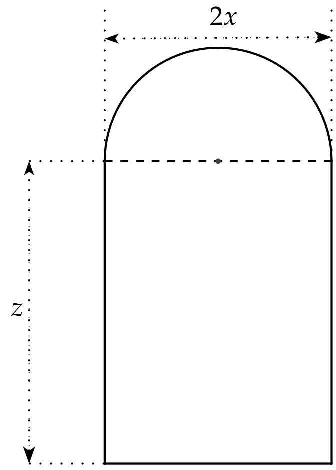
Zeichnen Sie den Graphen G_b für $b = \frac{1}{5}$ im Intervall $-4 \leq x \leq 4$.

b) Der Graph G_b für $b = \frac{1}{5}$, die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ und die x-Achse schließen eine Fläche vollständig ein. (5BE)

Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der Fläche.

Eine Firma produziert Garderobenspiegel in Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis (vgl. Abbildung). Die Spiegelfläche von $2\,\text{m}^2$ wird von einem Spiegelrahmen vollständig eingefasst. Die Kosten für die Herstellung eines Spiegelrahmens werden wie folgt kalkuliert:

- kreisförmig gebogener Teil des Rahmens mit dem Radius x (in m): 50 Euro pro Meter
- übrige Rahmenteile: 25 Euro pro Meter.



c) Die Längen z und x stehen in einem funktionalen Zusammenhang, der zum Aufstellen einer Funktionsgleichung für die Spiegelrahmen benötigt wird. (10BE)

Entwickeln Sie eine Gleichung, die z in Abhängigkeit von x beschreibt.

Die Funktion K mit $y = K(x) = 50 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\pi \cdot x + x + \dfrac{1}{x}\right)$ und $x > 0$

beschreibt die Kosten y (in Euro) für einen Spiegelrahmen in Abhängigkeit von x (in m).

Ermitteln Sie die Längen z und x für den Fall, dass die Kosten für einen Spiegelrahmen minimal sind.