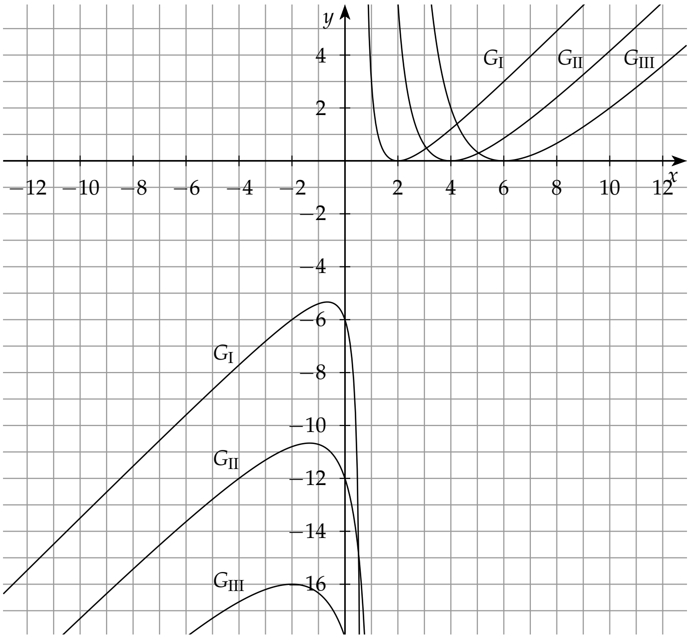
Im Bild unten sind drei Graphen der Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \dfrac{(x-3\cdot a)^2}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ gegeben.



a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktionen f_a an. (7P)
Begründen Sie, dass $x = a$ eine Polstelle ist.
Bestimmen Sie eine Gleichung für die schräge Asymptote.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte der Graphen von f_a. (13P)
Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden: $f_a'(x) = \dfrac{x^2-2ax-3a^2}{(x-a)^2}$
[Kontrollergebnisse: $H_a(-a \mid -8a)$, $T_a(3a \mid 0)$]
Begründen Sie, dass keiner der Graphen einen Wendepunkt besitzt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, auf der die lokalen Hochpunkte der Graphen von f_a liegen.

c) Geben Sie an, für welche Werte des Parameters a die Graphen gezeichnet worden sind und begründen Sie Ihre Entscheidung. (3P)

d) Zeichnen Sie für $a = 1$ alle Asymptoten und den Graphen der Funktion f_1 mindestens für das Intervall $[-6; 8]$. (6P)

e) Zeigen Sie, dass die Funktionsgleichung von f_1 in der Form $f_1(x) = x - 5 + \dfrac{4}{x-1}$ geschrieben werden kann. (6P)
Der Graph von f_1, die Gerade mit der Gleichung $y = x - 5$ sowie die Senkrechte $x = 3$ schließen eine Fläche ein, die ins Unendliche reicht.
Prüfen Sie, ob dieser Fläche ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann.

f) Die beiden Graphenteile von f_1 sind Bestandteile eines Eisenbahnnetzes. Zwischen den beiden Extrempunkten des Graphen soll eine neue Gleisverbindung gebaut werden. Der Übergang an den beiden Punkten soll jeweils „ohne Knick“ erfolgen, das heißt, in diesen beiden Punkten muss es jeweils einen gleichen Anstieg geben.
Modellieren Sie die neue Gleisverbindung durch eine ganzrationale Funktion von möglichst geringem Grad. (5P)

(40P)