

a) ▶ **Änderungsrate nach zwei Stunden berechnen**

(15P)

Laut Aufgabenstellung gibt  $x$  die Zeit in Stunden und  $f(x)$  die Änderungsrate der Wassermenge im Becken in Kubikmeter pro Stunde an. Die Änderungsrate nach zwei Stunden ist also gerade der Funktionswert  $f(2)$ .

$$f(2) = 0,2 \cdot 2^3 - 2,1 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 3,2$$

Nach zwei Stunden beträgt die Änderungsrate 3,2 Kubikmeter pro Stunde.

▶ **Integral berechnen und Lösungsweg dokumentieren**

Du sollst den Integralterm berechnen, ohne deinen GTR zu verwenden. Nutze also den **Hauptsatz der Integralrechnung** und bilde hierzu eine **Stammfunktion** von  $f$ .

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) \, dx &= \int_0^2 (0,2x^3 - 2,1x^2 + 5x) \, dx \\ &= \left[ 0,2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 - 2,1 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_0^2 \\ &= [0,05x^4 - 0,7x^3 + 2,5x^2]_0^2 \\ &= (0,05 \cdot 2^4 - 0,7 \cdot 2^3 + 2,5 \cdot 2^2) - (0,05 \cdot 0^4 - 0,7 \cdot 0^3 + 2,5 \cdot 0^2) \\ &= (0,05 \cdot 16 - 0,7 \cdot 8 + 2,5 \cdot 4) - 0 \\ &= 0,8 - 5,6 + 10 \\ &= 5,2 \end{aligned}$$

▶ **Ergebnis interpretieren**

Die Funktion  $f$  gibt dir die **Änderungsrate** des Wassers im Becken an. Also gibt dir das **Integral** von 0 bis 2 über  $f(x)$  die **Menge an Wasser** an, die in diesen zwei Stunden **insgesamt zugeflossen** ist. Laut Aufgabenstellung war das Becken zu Beginn ( $x = 0$ ) leer.

Du kannst also sagen: nach zwei Stunden befinden sich 5,2 Kubikmeter Wasser im Becken.

▶ **Aussage über den Wasserstand begründen**

Zu begründen ist die Aussage, dass sich nur zu Beginn kein Wasser im Becken befindet. Anders formuliert: du sollst zeigen, dass das Becken für  $x > 0$  **nie** ganz leer wird. Betrachte hierzu den Graphen von  $f$  und behalte im Hinterkopf, dass  $f$  die **Änderungsrate** des Wassers im Becken angibt.

Zwischen  $x = 0$  und  $x \approx 3,6$  verläuft der Graph von  $f$  oberhalb der  $x$ -Achse, d.h.  $f(x) > 0$ . In dieser Zeit **steigt** das Wasser im Becken, weil die Änderungsrate **positiv** ist. Es fließt Wasser zu.

Zwischen  $x = 3,6$  und  $x \approx 7$  verläuft der Graph von  $f$  unterhalb der  $x$ -Achse, d.h.  $f(x) < 0$ . In dieser Zeit **fällt** das Wasser im Becken, weil die Änderungsrate **negativ** ist.

Wasser fließt ab.

Ab  $x \approx 7$  fließt wieder Wasser zu.

Das Becken wird leer, wenn genauso viel Wasser **abläuft** wie **zuläuft**. Die Menge an ablaufendem bzw. zulaufendem Wasser wird wieder durch die **Fläche** zwischen dem Graphen und der  $x$ -Achse dargestellt.

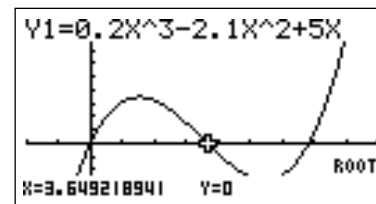
Es ist deutlich zu erkennen, dass die erste Fläche, die oberhalb der  $x$ -Achse liegt, mit etwa 7 FE (Kästchen) **größer** als die zweite Fläche ist, die unterhalb der  $x$ -Achse liegt und nur etwa 6 FE (Kästchen) groß ist. Es kann also nicht das ganze Wasser im Becken wieder abgeflossen sein. Nach 7 Stunden ist das Becken somit **nicht ganz leer**. Anschließend fließt wieder Wasser zu.

► **Zeitlichen Anteil in Prozent berechnen**

Die Wassermenge nimmt ab, wenn der Graph von  $f$  unterhalb der  $x$ -Achse verläuft. Eben haben wir die Zeitpunkte, die diesen Zeitraum begrenzen, mit  $x = 3,6$  und  $x = 7$  **geschätzt**. Nun gilt es, sie exakt zu berechnen. Anschließend bestimmst du den prozentualen Anteil, den diese Zeitspanne an den gesamten 8 Stunden hat.

Der Zeitraum, in dem der Graph von  $f$  unterhalb der  $x$ -Achse verläuft, wird durch die **Nullstellen** von  $f$  begrenzt.

Zeichne den Graphen von  $f$  im Intervall  $[0;8]$  und bestimme mit `SHIFT → F5 → F1` die Nullstellen von  $f$ .



Der GTR liefert die Nullstellen  $x_1 \approx 3,65$  und  $x_2 \approx 6,85$ . Für die Länge des Zeitraums, in dem die Wassermenge abnimmt, folgt so:

$$6,85 - 3,65 = 3,2$$

Innerhalb der ersten 8 Stunden nimmt die Wassermenge in 3,2 Stunden ab. **Prozentual** entspricht dies einem Anteil von:

$$\frac{3,2}{8} = 0,4 = 40\%$$

Innerhalb der ersten 8 Stunden nimmt die Wassermenge in 40 % der Zeit ab.

b) ► **Zweiten Zeitpunkt mit halber Füllung des Beckens bestimmen**

(15P)

Aus der Aufgabenstellung kennst du die **Maße** des Beckens und kannst so sein **Volumen**  $V$  berechnen:

$$V = \text{Länge} \cdot \text{Breite} \cdot \text{Höhe} = 3 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 12 \text{ m}^3$$

Insgesamt fasst das Becken  $12 \text{ m}^3$  Wasser; wenn es halb gefüllt ist, enthält es also  $6 \text{ m}^3$ . Gesucht ist nun der Zeitpunkt, zu dem der Wasserstand im Becken **zum zweiten Mal**  $6 \text{ m}^3$  beträgt.

Im Aufgabenteil a) hast du mit  $\int_0^2 f(x) dx$  den Wasserstand im Becken nach zwei Stunden berechnet. Nun ist der Wasserstand bekannt, aber die vergangene Zeit nicht. Diese Zeit  $t$  findest du in der **oberen Integralgrenze**. Gesucht ist also die (zweite) Lösung der Gleichung:

$$\int_0^t f(x) dx = 6$$

Diese Gleichung kannst du über den **Hauptsatz der Integralrechnung** lösen. Die Stammfunktion übernehmen wir von oben.

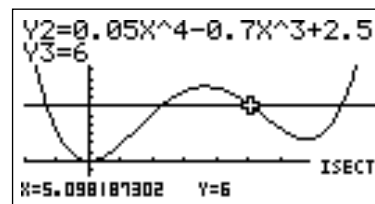
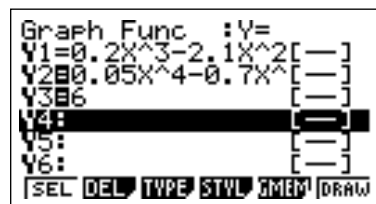
$$\int_0^t f(x) dx = 6$$

$$[0,05x^4 - 0,7x^3 + 2,5x^2]_0^t = 6$$

$$(0,05t^4 - 0,7t^3 + 2,5t^2) - (0,05 \cdot 0^4 - 0,7 \cdot 0^3 + 2,5 \cdot 0^2) = 6$$

$$0,05t^4 - 0,7t^3 + 2,5t^2 = 6$$

Diese Gleichung ist von Hand nicht lösbar. Löse sie also grafisch mit deinem Rechner. Fasse dazu die Terme links und rechts vom Gleichheitszeichen als **Funktionssterme** auf und trage sie im Y=-Menü ein. Zeichne dann die zugehörigen Graphen und bestimme deren **zweiten Schnittpunkt** mit dem Befehl `SHIFT → F5 → F5`.



Der GTR liefert die Stelle  $x \approx 5,1$ . Nach etwa 5,1 Stunden ist das Becken zum zweiten Mal halb mit Wasser gefüllt.

► **Wassermengen ermitteln, die dreimal angenommen werden**

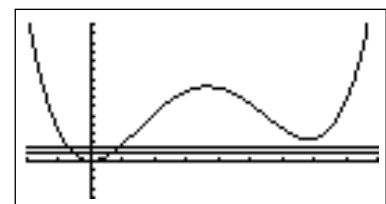
Wir wollen die Funktion, welche die **Wassermenge** im Becken beschreibt, mit  $F$  bezeichnen. Sie hat den Funktionsterm

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = 0,05x^4 - 0,7x^3 + 2,5x^2$$

und ist eine **Stammfunktion** von  $f$ , für die gilt:  $F(0) = 0$ .

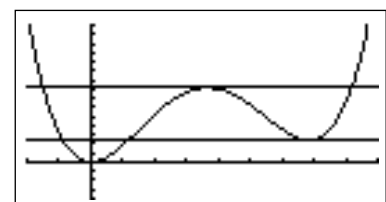
Du erkennst im GTR, dass der Graph von  $F$  einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt besitzt. Die  $y$ -Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt unterteilen die Wertemenge der Funktion in drei Bereiche:

Die Funktionswerte, die **kleiner** sind als die  $y$ -Koordinate des Tiefpunkts, in diesem Fall  $y = 1$  und  $y = 1,5$ , werden nur **genau einmal** angenommen.



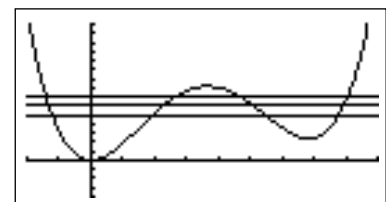
Dasselbe gilt für die Funktionswerte, die **größer** sind als die  $y$ -Koordinate des Hochpunkts, doch diese werden im Intervall  $[0; 8]$  nicht angenommen.

Die Funktionswerte, die **gleich** der  $y$ -Koordinate des Tiefpunkts bzw. des Hochpunkts sind, werden **genau zweimal** angenommen:



Einmal im Extrempunkt selbst und einmal in einem der Äste des Graphen.

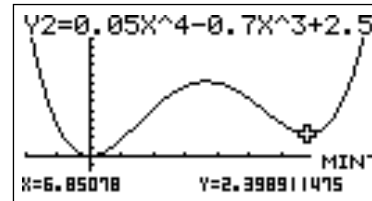
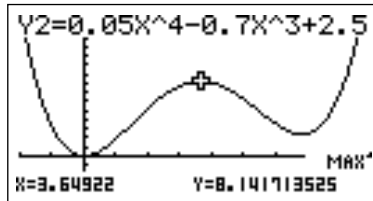
Zuletzt werden die Funktionswerte, die **kleiner** als die  $y$ -Koordinate des Hochpunkts, aber **größer** als die  $y$ -Koordinate des Tiefpunkts sind, **genau dreimal** angenommen, in diesem Fall z.B. die Werte  $y = 5$ ,  $y = 6$  und  $y = 7$ .



Du kannst also so vorgehen:

- Berechne mit dem GTR die Koordinaten des Hochpunkts und des Tiefpunkts des Graphen von  $F$ .
- Gesucht sind die Werte, die dreimal angenommen werden. Sie liegen genau im Intervall auf der  $y$ -Achse, das von Hoch- und Tiefpunkt begrenzt wird.

Die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt erhältst du über `SHIFT → F5 → F2` bzw. `...F3`.



Die  $y$ -Koordinate von Hoch- und Tiefpunkt schließen das Intervall  $[2, 3989; 8, 1417]$  ein. Alle Wassermengen, die zwischen diesen beiden Werten liegen, werden zu drei Zeitpunkten angenommen.

► **Maximale Höhe des Wasserstandes berechnen**

$F$  gibt dir die **Wassermenge** im Becken in Abhängigkeit von der Zeit an. Gesucht ist die maximale Wasserhöhe. Um sie zu berechnen, benötigst du zunächst die **maximale Wassermenge**, die sich innerhalb der ersten 8 Stunden im Becken befindet.

Du hast gerade die Koordinaten des Hochpunktes  $H(3,65 | 8,14)$  des Graphen von  $F$  bestimmt. Da  $F$  aber im Intervall  $[0; 8]$  betrachtet wird, können auch **Randextrema** auftreten.

- Untersuche also  $F(0)$  und  $F(8)$  und vergleiche die Werte mit der  $y$ -Koordinate des Hochpunkts. Entscheide so, welches die maximale Wassermenge im Becken in den ersten 8 Stunden ist.
- Gesucht ist dann die zugehörige **Füllhöhe** des Beckens. Verwende hierzu die Maßangaben aus der Aufgabenstellung: Die Wassersäule im Becken hat die Form eines Quaders mit Länge 3 m, Breite 2 m unbekannter Höhe  $h$ . Berechne über die Volumenformel für Quader die Höhe  $h$ .

**1. Schritt: Maximale Wassermenge ermitteln**

$$F(x) = 0,05x^4 - 0,7x^3 + 2,5x^2$$

$$F(0) = 0,05 \cdot 0^4 - 0,7 \cdot 0^3 + 2,5 \cdot 0^2 = 0$$

$$F(3,65) = 8,14$$

$$F(8) = 0,05 \cdot 8^4 - 0,7 \cdot 8^3 + 2,5 \cdot 8^2 = 6,4$$

Also wird der maximale Wasserstand zum Zeitpunkt 3,65 mit einem Volumen von etwa  $8,14 \text{ m}^3$  angenommen.

**2. Schritt: Maximale Wasserhöhe berechnen**

Das Becken und damit auch die Wassersäule sind 3 m lang und 2 m breit. Unbekannt ist die Höhe  $h$  der Wassersäule. Für das Volumen des Wassers gilt also:  $V(h) = 3 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot h$ .

Setze nun  $V(h) = 8,14 \text{ m}^3$  und löse nach  $h$  auf:

$$\begin{aligned} 3 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot h &= 8,14 \text{ m}^3 \\ 6 \text{ m}^2 \cdot h &= 8,14 \text{ m}^3 && | : (6 \text{ m}^2) \\ h &= 1,36 \text{ m} \end{aligned}$$

Die maximale Höhe des Wasserstandes beläuft sich innerhalb der ersten 8 Stunden auf etwa 1,36 m.

**c) ► Stetigkeit und Differenzierbarkeit am Übergang nachweisen** (16P)

Die Funktion  $h$  ist an der Übergangsstelle  $x = 2,5$  stetig und differenzierbar, wenn gilt:

- Stetig:  $f(2,5) = g(2,5)$
- Differenzierbar:  $f'(2,5) = g'(2,5)$

**1. Schritt: Stetigkeit zeigen**

Berechne die Funktionswerte beider Funktionen:

$$\begin{aligned} f(2,5) &= 0,2 \cdot 2,5^3 - 2,1 \cdot 2,5^2 + 5 \cdot 2,5 \\ &= 2,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(2,5) &= 2,5 \cdot e^{1,75 - 0,7 \cdot 2,5} \\ &= 2,5 \cdot e^{1,75 - 1,75} = 2,5 \cdot e^0 \\ &= 2,5 \end{aligned}$$

**2. Schritt: Differenzierbarkeit**

Leite  $f$  und  $g$  zunächst ab. Verwende bei  $f$  die Potenzregel und bei  $g$  die Kettenregel. Berechne anschließend die Funktionswerte der ersten Ableitung an der Übergangsstelle  $x = 2,5$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0,2 \cdot 3x^2 - 2,1 \cdot 2x + 5 \\ &= 0,6x^2 - 4,2x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2,5) &= 0,6 \cdot 2,5^2 - 4,2 \cdot 2,5 + 5 \\ &= -1,75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2,5 \cdot (-0,7) \cdot e^{1,75 - 0,7x} \\ &= -1,75e^{1,75 - 0,7x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(2,5) &= -1,75e^{1,75 - 0,7 \cdot 2,5} \\ &= -1,75e^{1,75 - 1,75} \\ &= -1,75e^0 \\ &= -1,75 \end{aligned}$$

Wegen  $f(2,5) = g(2,5) = 2,5$  und  $f'(2,5) = g'(2,5) = -1,75$  ist die Funktion  $h$  an der Übergangsstelle stetig und differenzierbar.

**► Stammfunktion nachweisen**

$G$  ist eine Stammfunktion von  $g$ , wenn  $G'(x) = g(x)$  ist. Leite also  $G$  nach der Kettenregel ab und vergleiche mit  $g(x)$ :

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\frac{25}{7} \cdot (-0,7) \cdot e^{1,75-0,7x} \\ &= -\frac{25}{7} \cdot \left(-\frac{7}{10}\right) e^{1,75-0,7x} \\ &= \frac{25}{7} \cdot \frac{7}{10} e^{1,75-0,7x} \\ &= \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{2} e^{1,75-0,7x} \\ &= 2,5e^{1,75-0,7x} = g(x) \end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, dass  $G$  eine Stammfunktion von  $g$  ist.

**► Untersuchen, ob das Wasserbecken jemals überläuft**

Du weißt, dass das Wasserbecken insgesamt  $12 \text{ m}^3$  Wasser fasst. Die Funktion  $h$  beschreibt wieder die **Änderungsrate** des Wassers im Becken. Die Wassermenge zu einem Zeitpunkt  $t$  selbst wird also wieder durch die **Stammfunktion** von  $H$  bzw. durch das Integral  $\int_0^t h(x) dx$  beschrieben.

Die Frage ist nun: Nimmt dieses Integral jemals einen Wert an, der größer als 12 ist? Du kannst so vorgehen:

- Bestimme zunächst den Term einer Funktion  $H$ , welche dir die Wassermenge im Becken angibt.
- Das Wörtchen „jemals“ weist auf eine **Grenzwertbetrachtung** hin. Untersuche also den Grenzwert von  $H(x)$  für  $x \rightarrow \infty$ . Ist er kleiner oder gleich 12, so läuft das Becken nie über.

**1. Schritt: Funktionsterm von  $H$  bestimmen**

$H$  gibt die Menge des Wassers im Becken zu einem bestimmten Zeitpunkt  $x$  an. Um die Variable  $x$  nicht doppelt zu besetzen, verwenden wir für  $H$  zunächst die Variable  $t$ .

Innerhalb der ersten 2,5 Stunden wird die Entwicklung der Wassermenge im Becken durch die Funktion  $f$  beschrieben, anschließend durch die Funktion  $g$ . Für den Zeitraum  $[0; 2,5]$  gilt für die Wassermenge also:

$$\int_0^t f(x) dx.$$

Wird ein Zeitpunkt später als nach 2,5 Stunden betrachtet, so muss die Entwicklung aus den ersten 2,5 Stunden aber selbstverständlich auch mit berücksichtigt werden. Die Wassermenge, die nach 2,5 h zu- bzw. abfließt, wird zu der Wassermenge addiert, die nach 2,5 Stunden bereits im Becken vorhanden ist.

Deshalb gilt für  $H$ :

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_0^{2,5} f(x) \, dx + \int_{2,5}^t g(x) \, dx \\ &= [F(x)]_0^{2,5} + [G(x)]_{2,5}^t \\ &= F(2,5) - F(0) + G(t) - G(2,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= 0,05x^4 - 0,7x^3 + 2,5x^2; \quad G(x) = -\frac{25}{7}e^{1,75-0,7x} \\ &= (0,05 \cdot 2,5^4 - 0,7 \cdot 2,5^3 + 2,5 \cdot 2,5^2) - (0,05 \cdot 0^4 - 0,7 \cdot 0^3 + 2,5 \cdot 0^2) + \left(-\frac{25}{7} \cdot e^{1,75-0,7t}\right) - \left(-\frac{25}{7} \cdot e^{1,75-0,7 \cdot 2,5}\right) \\ &= 6,640625 - 0 - \frac{25}{7} \cdot e^{1,75-0,7t} + \frac{25}{7} \cdot e^0 \\ &= 6,640625 - \frac{25}{7} \cdot e^{1,75-0,7t} + \frac{25}{7} \\ &= -\frac{25}{7} \cdot e^{1,75-0,7t} + \frac{25}{7} + 6,640625 \end{aligned}$$

## 2. Schritt: Grenzwert von $H(t)$ berechnen

$$H(t) = -\frac{25}{7} \cdot e^{1,75-0,7t} + \frac{25}{7} + 6,640625$$

Wenn  $t$  große Werte annimmt, so strebt der **Exponent**  $1,75 - 0,7t$  gegen **Minus Unendlich**. Entsprechend nähert sich der Ausdruck  $e^{1,75-0,7t}$  für große Werte von  $t$  der **Null**. Aus diesen Überlegungen folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{25}{7} \cdot \underbrace{e^{1,75-0,7t}}_{\rightarrow 0} + \frac{25}{7} + 6,640625 \right) \\ &= -\frac{25}{7} \cdot 0 + \frac{25}{7} + 6,640625 \\ &= \frac{25}{7} + 6,640625 \approx 10,212 \end{aligned}$$

Langfristig nähert sich die Wassermenge im Becken dem Wert  $10,21 \text{ m}^3$ . Dieser Wert ist kleiner als  $12 \text{ m}^3$ . Also läuft das Becken nie über.

### d) ► Identität der Geraden mit einer Tangenten begründen (14P)

Die Gerade, die durch die Punkte  $R(2,5 \mid 0)$  und  $Q_k(5 \mid f_k(5))$  verläuft, möchten wir  $g_{RQ}$  nennen. Diese Gerade ist Tangente im Punkt  $Q_k$ , wenn

- $Q_k$  auf der Geraden liegt. Dies ist aber bereits gegeben, weil die Gerade ja durch  $Q_k$  verläuft.

und

- Die Steigung der Geraden  $g_{RQ}$  mit der Steigung von  $f_k$  in diesem Punkt übereinstimmt.

Du kannst also so vorgehen:

- Bestimme zunächst die Steigung der Geraden  $g_{RQ}$  durch die Punkte  $R$  und  $Q_k$ .
- Berechne mit  $f'_k(5)$  die **Steigung** von  $f_k$  im Punkt  $Q_k$ .
- Vergleiche die Steigung von  $f_k$  im Punkt  $Q_k$  mit der Steigung der Geraden  $g_{RQ}$ .

### 1. Schritt: Geradensteigung bestimmen

Für die Steigung  $m$  einer Geraden, welche durch zwei Punkte  $P(x_P | y_P)$  und  $Q(x_Q | y_Q)$  verläuft, gilt:

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

In unserem Fall verläuft die Gerade durch  $R(2,5 | 0)$  und  $Q(5 | f_k(5))$ . Mit

$$f_k(5) = 0,2 \cdot 5^3 - k \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 = 25 - 25k + 25 = 50 - 25k$$

folgen die vollständigen Koordinaten von  $Q(5 | 50 - 25k)$ . Einsetzen der Koordinaten beider Punkte in die Formel zur Berechnung der Steigung  $m$  ergibt:

$$m = \frac{50 - 25k - 0}{5 - 2,5} = \frac{50 - 25k}{2,5} = 20 - 10k$$

### 2. Schritt: Steigung von $f_k$ im Punkt $Q_k$ berechnen

Die Steigung einer Funktion wird dir immer durch deren erste Ableitung gegeben. Du interessierst dich für die Steigung im Punkt  $Q_k$ , also an der Stelle  $x = 5$ . Bestimme also  $f'_k(5)$ . Leite dazu  $f_k$  zunächst nach der Potenzregel ab.

$$\begin{aligned} f'_k(x) &= 0,2 \cdot 3x^2 - 2 \cdot k \cdot x + 5 \\ &= 0,6x^2 - 2kx + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_k(5) &= 0,2 \cdot 3 \cdot 5^2 - 2 \cdot k \cdot 5 + 5 \\ &= 0,6 \cdot 25 - 10k + 5 \\ &= 15 - 10k + 5 \\ &= 20 - 10k \end{aligned}$$

Ein Vergleich zeigt:  $m = f'_k(5) = 20 - 10k$ . Außerdem verläuft die Gerade  $g_{RQ}$  durch den Punkt  $Q_k$ . Somit ist gezeigt, dass die Gerade für alle  $k > 0$  eine Tangente an den Graphen von  $f_k$  im Punkt  $Q_k$  ist.

#### ► Existenz der Wendepunkte untersuchen

Sei  $x_k$  zunächst die  $x$ -Koordinate der Wendepunkte. Sie ist noch unbekannt und muss noch bestimmt werden. Gesucht sind diejenigen Wendepunkte, bei denen die  $y$ -Koordinate fünfmal so groß ist wie die  $x$ -Koordinate. Es muss also gelten:  $y_k = 5 \cdot x_k$ .

Zuvor musst du aber die  $x$ -Koordinate  $x_k$  der Wendepunkte bestimmen. Für sie gilt:

- notwendige Bedingung:  $f''_k(x_k) = 0$
- hinreichende Bedingung:  $f'''_k(x_k) \neq 0$

Du kannst also so vorgehen:

- Bestimme zunächst die zweite und dritte Ableitung von  $f_k$ .
- Löse die Gleichung  $f''_k(x) = 0$  und erhalte potentielle Wendestellen.



- Setze diese potentiellen Wendestellen ein in die dritte Ableitung  $f_k'''(x)$  und untersuche das hinreichende Kriterium.
- Versuche zuletzt, die Gleichung  $y_k = 5 \cdot x_k$  zu lösen. Wenn sie lösbar ist, so gibt es Wendepunkte, bei denen die  $y$ -Koordinate fünfmal so groß ist wie die  $x$ -Koordinate. Ist sie nicht lösbar, so existieren derartige Wendepunkte nicht.

### 1. Schritt: Ableitungen bestimmen

$$f_k'(x) = 0,6x^2 - 2kx + 5$$

$$f_k''(x) = 0,6 \cdot 2x - 2k \\ = 1,2x - 2k$$

$$f_k'''(x) = 1,2$$

### 2. Schritt: Notwendiges und hinreichendes Kriterium prüfen

Setze  $f_k''(x) = 0$ , um potentielle Wendestellen zu ermitteln:

$$1,2x - 2k = 0 \quad | +2k \\ 1,2x = 2k \quad | :1,2 \\ x = \frac{5}{3}k$$

Betrachte die dritte Ableitung  $f_k'''(x) = 1,2$ . Sie ist **immer ungleich Null**. Also ist das hinreichende Kriterium auf jeden Fall erfüllt.

Die  $x$ -Koordinate der Wendepunkte lautet deshalb  $x_k = \frac{5}{3}k$ .

### 3. Schritt: Gleichung lösen und Existenz untersuchen

Die Frage ist: Ist die Gleichung  $y_k = 5 \cdot x_k$  lösbar?  $y_k$  ist dir in der Aufgabenstellung gegeben,  $x_k$  hast du eben berechnet. Setze beide in die zu untersuchende Gleichung ein und versuche, diese nach  $k$  zu lösen.

$$y_k = 5 \cdot x_k \\ \frac{25}{3}k - \frac{50}{27}k^3 = 5 \cdot \frac{5}{3}k \\ \frac{25}{3}k - \frac{50}{27}k^3 = \frac{25}{3}k \quad | -\frac{25}{3}k \\ -\frac{50}{27}k^3 = 0$$

Laut Aufgabenstellung ist  $k > 0$ . Also hat diese Gleichung **keine Lösung**. Entsprechend folgt: Es gibt keine Wendepunkt, deren  $y$ -Koordinate fünfmal so groß ist wie die zugehörige  $x$ -Koordinate.