

2.1 ► Darstellung im Koordinatensystem

(7P)

Die Darstellung des Kanalquerschnitts in einem Koordinatensystem soll laut Aufgabenstellung aus drei Teilen bestehen:

1. der Randkurve des Kanalquerschnitts,
2. der Geraden des Normalpegels auf der x -Achse und
3. den Kanalbegrenzungen über Wasser, die tangential an die Randkurve gesetzt werden.

Die Funktionsgleichung der Randkurve ist gegeben. Ihr Definitionsbereich beschränkt sich allerdings so, dass die Kurve dauerhaft im negativen y -Bereich verläuft, also unter dem Wasserspiegel. Er ist also durch die Schnittpunkte N_1 und N_2 mit der x -Achse begrenzt.

Auf der x -Achse haben alle Punkte die y -Koordinate Null. Für N_1 und N_2 gilt daher:

$$f(x) = 0$$

Die Gerade des Normalpegels ist identisch mit der x -Achse und kann sofort eingezeichnet werden. Da alle Punkte auf der x -Achse die y -Koordinate Null besitzen, lautet ihre Gleichung somit:

$$y = 0$$

Die Kanalbegrenzungen sind abhängig von N_1 und N_2 , da sie in diesen Punkten ansetzen. Zudem führen sie die Randkurve tangential fort, das heißt sie haben die gleiche Steigung wie die Punkte, mit denen die Randkurve endet - also wiederum N_1 und N_2 .

Kurz: Die Kanalbegrenzungen werden durch Tangenten an f in N_1 und N_2 dargestellt.

Ihre Gleichungen lassen sich über die Tangentenformel ermitteln. Diese lautet:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Sind die Tangentengleichungen bestimmt, dürfen nur die Punkte der Geraden eingezeichnet werden, deren y -Koordinaten den Wert 1,8 nicht überschreiten. Dies ist laut Aufgabenstellung die Auslegung der Begrenzungen.

Es sind also insgesamt drei Schritte nötig:

1. Schnittpunkte von f mit der x -Achse bestimmen.
2. Die Tangentengleichungen der Kanalbegrenzungen ermitteln.
3. Randkurve, Normalpegel und Kanalbegrenzungen in das Koordinatensystem einzeichnen.

2.2.1 ► Wasservolumen pro Sekunde

(4P)

Gesucht ist das Wasservolumen, das pro Sekunde durch den Kanalquerschnitt fließt. Die Fließgeschwindigkeit des Wassers beträgt 1,3 m pro Sekunde. Das bedeutet, dass innerhalb einer Sekunde ein 1,3 m langer Wasserabschnitt den Ort der Strömungsmessung passiert.

Die Länge dieses Wasserabschnitts ist gleichsam die Höhe eines Prismas, dessen Grundfläche der Querschnitt des Kanals darstellt. Das Volumen des Prismas ist demnach das Volumen, das innerhalb einer Sekunde bei Normalpegel durch den Kanalquerschnitt fließt.

Für das gesuchte Volumen V gilt also die Volumenformel eines Prismas mit der Grundfläche G und der Höhe h :

$$V = G \cdot h$$

Die Höhe ist bekannt. Sie beträgt $h = 1,3$ m. Die Grundfläche dagegen bildet bei Normalpegel die von der x -Achse und dem Schaubild von f eingeschlossene Fläche. Diese lässt sich durch Integration ermitteln.

2.2.2 ► **Bestimmung des neuen Wasserpegels**

(4P)

Gesucht ist der neue, niedrigere Wasserstand, der sich ergibt, wenn bei gleicher Strömungsgeschwindigkeit nur noch 80 % der Wassermenge pro Sekunde fließen. Das neue Wasservolumen, das innerhalb einer Sekunde durch den Kanalwuerschnitt fließt beträgt damit

$$V_n = 80\% \cdot V_{GES}$$

Für das zuvor berechnete Wasserprisma gilt aus diesen Angaben heraus, dass die Höhe wegen der Strömungsgeschwindigkeit konstant bleibt, sie beträgt immer noch

$$h = 1,3 \text{ m}$$

Die Grundfläche ändert sich dagegegen. Für das neue Volumen gilt also ebenfalls:

$$V_n = G_n \cdot h$$

Die Grundfläche ändert sich dadurch, dass der Wasserspiegel sinkt. Die Grundfläche ist nun nicht mehr zwischen dem Schaubild von f und der x -Achse eingeschlossen, sondern zwischen dem Schaubild und einer Parallelen zur x -Achse im negativen y -Bereich. Diese hat allgemein die Gleichung:

$$y = c,$$

Die Darstellung im Koordinatensystem könnte etwa so aussehen:

