a)

(1)

▸ Bestimmen einer Koordinatenform der Ebene *E*

Der Aufgabenstellung kannst du hier entnehmen, dass die Punkte A, B und C, mit

- $A(0,3 \mid 3,7 \mid 4,85)$
- $B(-0,15 \mid 3,7 \mid 5,3)$
- $C(-0,3 \mid 4,3 \mid 5,15)$

auf dem **kreisförmigen** Glasrand liegen. Deine Aufgabe ist es dabei, die **Koordinatenform** der Ebene E zu bestimmen, in welcher der Glasrand mit diesen drei Punkten liegt.
Die Koordinatenform einer Ebene E baut sich dabei wie folgt auf:
$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ mit:

- n_1, n_2 und n_3: Einträge des **Normalenvektors $\overrightarrow{n}$**
- d: Über **Punktprobe** zu bestimmende **Konstante**

Bestimme also zunächst den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene E. Berechne dazu das **Vektorprodukt** von **2 Richtungsvektoren** der Ebene E. Bestimme anschließend d über eine **Punktprobe** mit einem Punkt, von dem du weißt, dass dieser in der Ebene E liegt.

(2)

▸ Berechnen des Schnittwinkels zwischen der Ebene *E* und der Bodenebene

Nun sollst du den **Schnittwinkel** zwischen der Ebenen E und der Bodenebene berechnen.
Für den Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen gilt dabei der folgende Zusammenhang:
$\cos\alpha = \dfrac{|n_1 \circ n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|}$ mit:

- n_1 und n_2: **Normalenvektoren** der Ebenen

Um den Schnittwinkel zwischen den Ebenen zu berechnen, benötigst du hier also zunächst die Normalenvektoren der betrachteten Ebenen. Den Normalenvektor der Ebenen E hast du oben bereits bestimmt.
Über die Bodenebene weißt du, dass diese **parallel** zur x_1x_2-Ebene ist. Finde also einen Normalenvektor für die x_1x_2-Ebene, um hier einen Normalenvektor für die Bodenebene angeben zu können.

(3)

▸ Berechnen des Abstands des Punktes *S* von der Ebene *E*

Zuletzt sollst du hier den Abstand des Punktes S mit $S(-0,3 \mid 3,85 \mid 4,7)$ von der Ebene E berechnen. Beachte dabei, dass hier eine Längeneinheit **einem Meter** in der Wirklichkeit entspricht.
Den Abstand $d(E;P)$ zwischen einem Punkt und einer Ebene berechnest du im Allgemeinen über die **Hessesche Normalform**, welche sich wie folgt angeben lässt:

$$d(E;P) = \left| \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - d}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right| \text{ mit:}$$

- n_1, n_2 und n_3: Einträge des **Normalenvektors** der Ebene E

- x_1, x_2 und x_3: **Koordinaten** des Punktes P
- d: **Konstante** aus der Ebenengleichung

Setze also die Informationen aus der Ebenengleichung sowie die Koordinaten von S oben ein, um hier den gesuchten Abstand zu bestimmen.

b)

(1)

▸ Zeigen, dass der Lotfußpunkt der Mittelpunkt M des Glasrandkreises ist

Nun wird das **Lot** von S aus auf die Ebene E gefällt. Du sollst dabei zeigen, dass der Lotfußpunkt der **Mittelpunkt M** des Glasrandkreises ist. Weiterhin sollst du hier dann den **Radius** des Glasrandkreises bestimmen.
Beginne damit die Koordinaten von M zu bestimmen. Willst du diese bestimmen, so stellst du im ersten Schritt die **Lotgerade l** auf. Die Lotgerade l besitzt dabei als **Stützvektor** den Ortsvektor des Punktes S, da von diesem Punkt aus das Lot auf die Gerade gefällt wird. Außerdem verläuft diese **orthogonal** zur Ebene E.
Hast du die Lotgerade l bestimmst, so schneidest du diese mit der Ebene E in Koordinatenform. Der resultierende **Schnittpunkt** entspricht dann dem Punkt M.
Beachte beim Punkt M, dass dieser zu jedem Punkt auf dem Glasrandkreis den **gleichen Abstand** besitzen muss. Bestimme so den Radius und zeige, dass M auch wirklich der Mittelpunkt des Kreises ist.
Gehe beim Lösen der Aufgabe also so vor:

- Stelle die **Lotgerade** auf
- **Schneide** die Lotgerade mit der Ebene E in Koordinatenform
- Bestimme den Radius und zeige, dass M der **Mittelpunkt** des Kreises ist

(2)

▸ Bestimmen der Koordinaten des Fußpunktes F

Hier sollst du nun die Koordinaten des **Fußpunktes F** bestimmen. Der Fußpunkt F liegt am Ende des **1 m** langen Glasmodellstiels, der in Richtung der Verlängerung der Strecke $\overline{MS}$ verläuft.
Das bedeutet hier, dass der Punkt S **einen Meter** vom Punkt F **entfernt** liegt. Die Richtung von S zu F entspricht dabei der Richtung von M zu S.
Die Koordinaten von F bestimmst du hier über eine **Vektorenkette**. Bestimme dazu zunächst den Vektor $\overrightarrow{MS}$ und **normiere** diesen. Setze den normierten Vektor $\overrightarrow{MS}_0$ so an $\overrightarrow{OS}$ an, dass du $\overrightarrow{OF}$ erhältst. Beachte dabei, dass die Länge der Strecke $\overline{SF}$ einen Meter betragen muss.

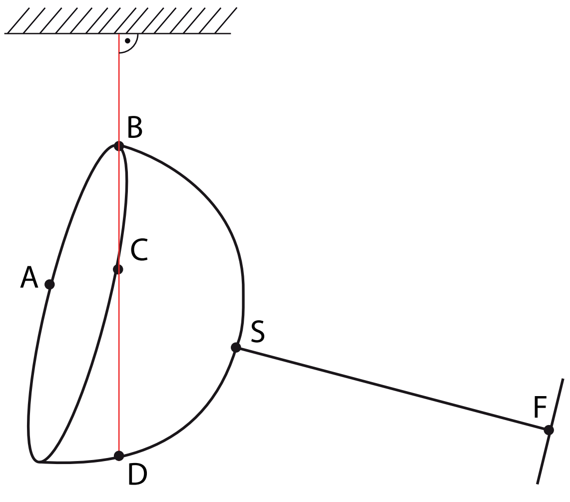
c)

(1)

▸ Bestimmen der Koordinaten des Befestigungspunktes D

Der Aufgabenstellung kannst du hier nun entnehmen, dass das Glasmodell an einer **orthogonal zur Decke** verlaufenden geraden Stange aufgehängt ist. Diese Stange durchstößt dabei das Glasmodell im Punkt B und wird an einem weiteren Punkt D des Glases befestigt. Deine Aufgabe ist es nun, die **Koordinaten** dieses **Punktes D** zu bestimmen.

Verläuft nun eine Stange orthogonal zur Decke durch den Punkt B, so muss diese zwangsläufig auf der **Halbkugel** auftreffen, die den Kelch des Glases repräsentiert, das siehst du an der in der Aufgabenstellung gegebenen Skizze.



Stelle also zunächst eine **Kugelgleichung** der **Halbkugel *K*** auf, welche den Kelch repräsentiert. Die allgemeine Kugelgleichung lautet dabei:

$K:\ (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$ mit:

- m_1, m_2 und m_3: Koordinaten des **Mittelpunktes** der Kugel
- r: **Radius** der Kugel

Hast du eine Kugelgleichung von K bestimmt, so bestimme im nächsten Schritt eine **Gerade**, die die **Richtung der Stange** repräsentiert. **Schneide** anschließend diese Gerade mit der Kugel K und bestimme so den Punkt D.

(2)

▶ Nachweisen, dass der Sicherheitsabstand für den Punkt *B* eingehalten wird

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass entlang der Geraden g mit

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4,7 \\ 4,6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3,7 \\ 2,6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lichterkette aufgehängt werden soll.
Du sollst nun nachweisen, dass für den Punkt B des Glasmodells ein **Sicherheitsabstand** zur Lichterkette von **mindestens 2 m** eingehalten wird. Hier ist es also deine Aufgabe, zu zeigen, dass der **Abstand** zwischen **Punkt *B*** und der **Geraden *g*** mindestens 2 m beträgt. Hier musst du also den **kürzesten Abstand** zwischen Punkt B und der Geraden g bestimmen und zeigen, dass dieser kleiner als 2 m ist. Gehe dabei so vor:

- Bestimme **Hilfsebene *H*** in Koordinatenform:
  - Der Richtungsvektor der Geraden g entspricht dem **Normalenvektor** von H
  - H **enthält** den Punkt B
- Bestimme den **Schnittpunkt *P*** der **Hilfsebenen *H*** und **Geraden *g***

- Die Länge des Vektors $\overrightarrow{BP}$ entspricht dem **kürzesten Abstand** zwischen g und B

d)

▸ Zeigen, dass alle Punkte auf dem Glasrandkreis liegen

Hier hast du die Menge aller Punkte X gegeben. Für den Ortsvektor $\overrightarrow{OX}$ gilt dabei:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + \sin(t) \cdot \overrightarrow{MA} + \cos(t) \cdot \overrightarrow{MB} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Nun sollst du zeigen, dass alle diese Punkt **auf dem Glasrandkreis** liegen.
Willst du hier zeigen, dass alle Punkte X auf dem Glasrandkreis liegen, so musst du hier zeigen, dass die **Abstände** der Punkte X zum **Mittelpunkt *M*** des Kreises dem **Radius *r*** des Kreises, mit $r = 0{,}45$ entsprechen.
Bilde dazu den Vektor $\overrightarrow{MX}$ und zeige mit Hilfe des **Betrags**, dass dessen Länge, **unabhängig von *t***, dem Radius entspricht.