a) ▶ **Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f_a angeben** (4P)

Der Definitionsbereich von f_a umfasst alle Werte, die für x in den Funktionsterm von f_a eingesetzt werden dürfen. Bei der Scharfunktion f_a handelt es sich um eine Schar gebrochenrationaler Funktionen, mit:
$f_a(x) = \dfrac{a \cdot x^2 + 3}{2 \cdot x - 1}$.
Beim Bestimmen der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ einer gebrochenrationalen Funktion betrachtest du den Nenner dieser Funktion. Bestimme alle Werte für x, für welche sich der Nenner der Funktion zu Null ergibt. Diese Werte müssen aus dem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f_a dann ausgeschlossen werden, da eine Division durch Null nicht zulässig ist.

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 0 && \mid +1 \\ 2x &= 1 && \mid :2 \\ x &= 0,5 \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f_a ergibt sich zu: $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\,, x \neq 0,5\}$ bzw. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0,5\}$.

▶ **Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$**

Nun sollst du das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ in Abhänigkeit des Parameters a mit $a \geq 0$ bestimmen.
Bei der Grenzwertbetrachtung einer gebrochenrationalen Funktion ist es sinnvoll, den Funktionsterm dieser Funktion in Zähler- und Nennerfunktion zu unterteilen. Hier gilt:

- Zählerfunktion: $Z(x) = a \cdot x^2 + 3$.
- Nennerfunktion: $N(x) = 2 \cdot x - 1$.

Das heißt, gilt $a \geq 0$, so liegt mit Z eine quadratische Funktion und mit N eine lineare Funktion vor. Gilt hingegen $a = 0$, so entfällt bei $Z(x)$ der quadratische Teil des Terms. Hier muss also offensichtlich eine Fallunterscheidung nach $a > 0$ und $a = 0$ gemacht werden.
Des Weiteren solltest du das Wachstumsverhalten der vorliegenden Funktionen beachten:

- Eine quadratische Funktion strebt für $x \to \pm\infty$ gegen ∞. Das Vorzeichen vor ∞ ist also nicht relevant.
- Das Wachstumsverhalten einer linearen Funktion ist abhängig vom Vorzeichen ∞.
- Eine quadratische Funktion besitzt für $x \to \pm\infty$ in jedem Fall ein stärkeres Wachstum als eine lineare Funktion.

1. Fall: $a > 0$

Beachte, dass in diesem Fall der Nennergrad der gebrochenrationalen Funktion kleiner als deren Zählergrad ist.

Grenzwert für $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} (f_a(x)) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\overbrace{(ax^2+3)}^{\to\infty}}{\underbrace{(2x-1)}_{\to\infty}} \right) = \infty$$

Der Grenzwert von f_a für $x \to \infty$ ist also: $\lim\limits_{x\to\infty} (f_a(x)) = \infty$.

Grenzwert für $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} (f_a(x)) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\overbrace{(ax^2+3)}^{\to\infty}}{\underbrace{(2x-1)}_{\to-\infty}} \right)$$

Da die Nennerfunktion N für $x \to -\infty$ nur negative Funktionswerte besitzt, ergibt sich der gesuchte Grenzwert zu:

$$\lim_{x\to\infty} (f_a(x)) = -\infty.$$

2. Fall: $a = 0$

Gilt $a = 0$, so ergibt sich der Term der Zählerfunktion Z zu $Z(x) = 3$. Das heißt, nun ist der Zählergrad der gebrochenrationalen Funktionenschar f_a kleiner als der Nennergrad dieser Funktion. Für die Grenzwerte von f_a für $x \to \pm\infty$ gilt demnach, dass diese unabhängig vom Vorzeichen vor ∞ gegen Null gehen, da die Zahl im Nenner der Funktion immer größer wird. Für die Grenzwerte von f_a für $a = 0$ und $x \to \pm\infty$ gilt also:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f_a(x)) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3}{2\cdot x - 1} \right) = 0.$$

b) ▶ **Bestimmen des Parameters a und der Art des Extremums** (17P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass einer der Graphen G_a der Scharfunktion f_a einen Extrempunkt E mit dem Koordinaten $E(-1 \mid f_a(-1))$ besitzt. Deine Aufgabe ist es nun, den Parameterwert a jener Funktion f_a zu bestimmen, welche eben diesen Extrempunkt E besitzt. Des Weiteren ist es hier deine Aufgabe, die Art des Extremums festzustellen.

Bei einer Extremstelle x_E sind dabei folgende zwei Bedingungen immer erfüllt:

- Notwendige Bedingung: $f_a'(x_E) = 0$.
- Hinreichende Bedingung: $f_a''(x_E) \neq 0$.

Da dir bekannt ist, dass die Extremstelle sich bei $x_E = -1$ befindet, kannst du mit Hilfe der notwendigen Bedingung den gesuchten Parameterwert von a berechnen. Bestimme dazu zunächst die erste Ableitungsfunktion f_a' von f_a und ermittle, für welchen Parameterwert für a diese an der Stelle $x_E = -1$ die notwendige Bedingung für eine Extremstelle erfüllt. Bestimme anschließend mit Hilfe der zweiten Ableitung f_a'' von f_a und dem bestimmten Parameterwert für a die Art des Extremums bei $x_E = -1$, wobei für diese gilt:

- $f_a''(x_E) < 0$: Bei $x_E = -1$ befindet sich ein lokales Maximum.
- $f_a''(x_E) > 0$: Bei $x_E = -1$ befindet sich ein lokales Minimum.

Du gehst also so vor:

1. Schritt: Erste und zweite Ableitung von f_a bilden

2. Schritt: Parameterwert a über notwendige Bedingung bestimmen

3. Schritt: Art des Extremums bestimmen

1. Schritt: Erste Ableitung und zweite Ableitung von f_a bilden

Die gesuchte erste und zweite Ableitung von f_a berechnest du mit der Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
f_a(x) &= \frac{ax^2+3}{2\cdot x-1}\\
f_a'(x) &= \frac{(2ax)\cdot(2x-1)-(ax^2+3)\cdot 2}{(2x-1)^2}\\
&= \frac{(4ax^2-2ax)-(2ax^2+6)}{(2x-1)^2}\\
&= \frac{4ax^2-2ax-2ax^2-6}{(2x-1)^2}\\
&= \frac{2ax^2-2ax-6}{(2x-1)^2}\\
f_a''(x) &= \frac{(4ax-2a)\cdot(2x-1)^2-(4\cdot(2x-1))\cdot(2ax^2-2ax-6)}{(2x-1)^4}\\
&= \frac{(4ax-2a)\cdot(2x-1)^2}{(2x-1)^4}-\frac{4\cdot(2x-1)\cdot(2ax^2-2ax-6)}{(2x-1)^4}\\
&= \frac{(4ax-2a)\cdot(2x-1)}{(2x-1)^3}-\frac{4(2ax^2-2ax-6)}{(2x-1)^3}\\
&= \frac{8ax^2-4ax-4ax+2a}{(2x-1)^3}-\frac{(8ax^2-8ax-24)}{(2x-1)^3}\\
&= \frac{8ax^2-8ax+2a-(8ax^2-8ax-24)}{(2x-1)^3}\\
&= \frac{8ax^2-8ax+2a-8ax^2+8ax+24}{(2x-1)^3}\\
&= \frac{2a+24}{(2x-1)^3}
\end{aligned}$$

2. Schritt: Parameterwert a über notwendige Bedingung bestimmen

Soll die notwendige Bedingung für eine Extremstelle bei $x_E=-1$ erfüllt sein, so muss an dieser Stelle $f_a'(-1)=0$ gelten. Stelle diese Gleichung auf und löse sie nach a auf, um den gesuchten Parameterwert für a zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
f_a'(-1) &= 0\\
0 &= \frac{2\cdot a\cdot(-1)^2-2\cdot a\cdot(-1)-6}{(2\cdot(-1)-1)^2}\\
0 &= \frac{2\cdot a+2\cdot a-6}{(-3)^2}\\
0 &= \frac{4\cdot a-6}{9} && |\cdot 9\\
0 &= 4\cdot a-6 && |+6\\
6 &= 4\cdot a \;\Leftrightarrow\; a=1{,}5
\end{aligned}$$

Der gesuchte Parameterwert für a ist also $a=1{,}5$.

3. Schritt: Art des Extremums bestimmen

Setze nun $a=1{,}5$ und $x_E=-1$ in den Term der oben bestimmten zweiten Ableitungsfunktion f_a'' ein, um die Art der Extremstelle bei $x_E=-1$ feststellen zu können:

$$\begin{aligned} f''_{1,5}(x_E) &= \frac{2 \cdot 1,5 + 24}{(2 \cdot (x_E) - 1)^3} \\ &= \frac{27}{(2 \cdot (-1) - 1)^3} \\ &= \frac{27}{(-3)^3} \\ &= \frac{27}{-27} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Da $f''_{1,5}(-1) < 0$ gilt, besitzt die Funktion $f_{1,5}$ bei $x_E = -1$ ein lokales Maximum. Beim Extrempunkt E handelt es sich also um einen Hochpunkt.

▶ Ermitteln der Art und Koordinaten des zweiten lokalen Extrempunktes

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Graph der Funktion $f_{1,5}$ neben dem oben behandelten Hochpunkt einen weiteren Extrempunkt besitzt. Deine Aufgabe ist es dabei, die Koordinaten und die Art dieses Extrempunktes zu bestimmen.
Eine Extremstelle x_{E_2} erfüllt dabei folgende zwei Bedingungen (siehe oben):

- Notwendige Bedingung: $f'_{1,5}(x_{E_2}) = 0$
- Hinreichende Bedingung: $f''_{1,5}(x_{E_2}) \neq 0$

Die gesuchte weitere Extremstelle bestimmst du also über Nullsetzen der ersten Ableitungsfunktion $f'_{1,5}$ von $f_{1,5}$. Oben hast du bereits die allgemeinen Ableitungsfunktion f'_a und f''_a von f_a bestimmt. Verwende diese hier zum Bestimmen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion von $f_{1,5}$.
Hast du die weitere Extremstelle bei x_{E_2} bestimmt, so stellst du mit der zweiten Ableitungsfunktion $f''_{1,5}$ von $f_{1,5}$ deren Art fest, wobei auch hier wieder gilt:

- Aus $f''_{1,5}(x_{E_2}) < 0$ folgt: Die Funktion $f_{1,5}$ hat an der Stelle x_{E_2} ein lokales Maximum.
- Aus $f''_{1,5}(x_{E_2}) > 0$ folgt: Die Funktion $f_{1,5}$ hat an der Stelle x_{E_2} ein lokales Minimum.

Anschließend bestimmst du durch Einsetzen der bestimmten Extremstelle x_{E_2} in die Funktion $f_{1,5}$ die zugehörige y-Koordinate des Extrempunktes.

Du gehst also so vor:

1. Schritt: Ermitteln der Extremstelle x_{E_2} über notwendige Bedingung

2. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung bei x_{E_2}

3. Schritt: Bestimmen der y-Koordinate des Extrempunktes

1. Schritt: Ermitteln der Extremstelle x_{E_2} über notwendige Bedingung

Setze nun den Funktionsterm der ersten Ableitung $f'_{1,5}$ mit Null gleich, um mögliche Extremstellen zu bestimmen.

$$
\begin{aligned}
f'_{1,5}(x) &= 0 \\
\frac{2\cdot 1,5x^2 - 2\cdot 1,5x - 6}{(2x-1)^2} &= 0 \\
\frac{3x^2 - 3x - 6}{(2x-1)^2} &= 0 && \mid \cdot (2x-1)^2 \\
3x^2 - 3x - 6 &= 0 && \text{Mitternachtsformel} \\
x_{1/2} &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 3\cdot(-6)}}{2\cdot 3} \\
&= \frac{3 \pm \sqrt{81}}{6} \\
x_{E_1} &= \frac{3-9}{6} = -1 \\
x_{E_2} &= \frac{3+9}{6} = 2
\end{aligned}
$$

<u>*Alternativ:*</u>

Alternativ kannst du die Extremstellen auch mit der pq-Formel berechnen.
Dazu musst du die Gleichung von oben zunächst weiter umformen:

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 3x - 6 &= 0 \qquad \mid :3 \\
x^2 - 1 - 2 &= 0
\end{aligned}
$$

pq-Formel:

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{(-1)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-2)} \\
&= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\
&= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$x_{E_1} = -1$

$x_{E_2} = 2$

Da $x_{E_1} = -1$ schon in der Aufgabenstellung als Extremstelle angegeben wurde, ist $x_{E_2} = 2$ die gesuchte weitere Extremstelle.

2. Schritt: Bestimmen der Art des weiteren Extrempunktes

Um die Art des Extrempunktes zu bestimmen, setzt du $x_{E_2} = 2$ in die zweite Ableitung der Funktion $f_{1,5}$ ein.

$$f''_{1,5}(2) = \frac{27}{(2\cdot 2-1)^3} = \frac{27}{3^3} = \frac{27}{27} = 1 > 0$$

Da $f''_{1,5}(2) > 0$ gilt, befindet sich an der Stelle $x_{E_2} = 2$ ein lokales Minimum.

3. Schritt: Bestimmen der y-Koordinate des Extrempunktes

Um nun die y-Koordinate des Tiefpunktes T zu bestimmen, setzt du $x_{E_2} = 2$ in $f_{1,5}(x)$ ein.

$$\begin{aligned} f_{1,5}(x) &= \frac{1,5x^2+3}{2x-1} \\ f_{1,5}(2) &= \frac{1,5\cdot 2^2+3}{2\cdot 2-1} \\ &= \frac{9}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Die vollständigen Koordinaten des weiteren Extrempunktes bzw. des Tiefpunktes T des Graphen von $f_{1,5}$ lauten also: $T(2 \mid 3)$.

c) ▶ **Zeigen, dass alle Graphen G_a sich auf der y-Achse schneiden** (3P)

In diesem Aufgabenteil sollst du zeigen, dass sich alle Graphen G_a auf der y-Achse schneiden. Das heißt, dass du zunächst den Schnittpunkt S_y mit der y-Achse für alle Graphen G_a berechnest. Ist dieser unabhängig von Parameter a, so besitzen alle Graphen G_a denselben Schnittpunkt mit der y - Achse und du hast so gezeigt, dass alle Graphen G_a sich auf der y-Achse schneiden.

Berechne $f_a(0)$ und zeige, dass der resultierende Wert unabhängig von a ist:

$$\begin{aligned} f_a(0) &= \frac{a\cdot 0^2+3}{2\cdot 0-1} \\ &= \frac{3}{-1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt S_y aller Graphen G_a mit der y-Achse hat diese Koordinaten: $S_y(0| -3)$. Da die Koordinaten von S_y nicht von a abhängig sind, hast du gezeigt, dass sich alle Graphen G_a auf der y-Achse schneiden.

▶ **Nachweis der gemeinsamen Tangente t**

Nun sollst du nachweisen, dass die Graphen G_a im gemeinsamen Punkt S_y eine gemeinsame Tangente t haben und anschließend sollst du deren Gleichung ermitteln.
Damit alle Graphen G_a bei S_y eine gemeinsame Tangente besitzen, müssen folgende zwei Bedingungen an der Stelle $x_{S_y} = 0$ erfüllt sein:

- Der Funktionswert aller Scharfunktionen muss bei $x_{S_y} = 0$ unabhängig von a sein.
- Der Ableitungswert bzw. die Steigung der Scharfunktionen muss bei $x_{S_y} = 0$ unabhängig von a sein.

Da du die erste Bedingung bereits im vorherigen Aufgabenteil gezeigt hast, muss du hier nur noch nachweisen, dass alle f_a bei $x_{S_y} = 0$ die gleiche Steigung besitzen. Berechne dazu den Ableitungswert $f_a'(x_{S_y})$ und zeige, dass dieser unabhängig von a ist.

Die Tangentengleichung der gesuchten Tangente berechnest du dann über die allgemeine Form für eine Gerade:

$t(x) = mx + b$, mit:

- m: Steigung der Tangenten
- b: y-Achsenabschnitt der Tangenten

1. Schritt: Berechnen des Ableitungswerts $f'_a(x_{S_y})$

$$f'_a(0) = \frac{2a \cdot 0^2 - 2a \cdot 0 - 6}{(2 \cdot 0 - 1)^2} = \frac{-6}{1} = -6$$

Da die Steigung aller Scharfunktionen an der Stelle x_{S_y} mit $f'_a(x_{S_y}) = -6$ unabhängig von a ist, besitzen alle Graphen G_a bei $S_y(0 \mid -3)$ die gleiche Tangente t.

2. Schritt: Bestimmen der Gleichung der Tangenten t

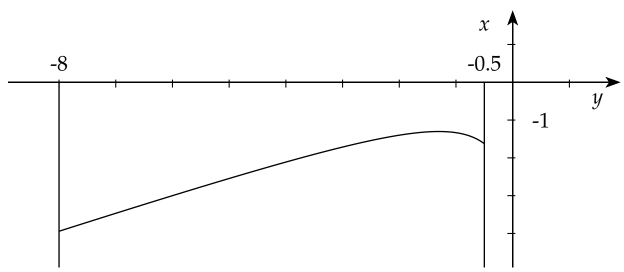
Nach obigen Erkenntnissen ist die Steigung der Tangenten t $m = -6$ und der y-Achsenabschnitt $b = -3$. Die Tangentengleichung von t ergibt sich demnach zu:

$t(x) = -6 \cdot x - 3.$

d) ▶ **Berechnen der Querschnittsfläche des Brückenträgers** (7P)

In diesem Aufgabenteil sollst du den Flächeninhalt der Querschnittsfläche eines Brückenträgers berechnen. Der Graph G_1 schließt diesen Flächeninhalt modellhaft mit den zur y-Achse parallelen Geraden $x = -8$ und $x = -0,5$ und der x-Achse ein. Der berechnete Flächeninhalt soll auf zwei Dezimalstellen gerundet werden.

Um den Flächeninhalt A_B der Querschnittsfläche zu berechnen, berechnest du das Integral von f_1 über dem Intervall [-8;-0,5] . Berechnen kannst du es über den Hauptsatz der Integralrechnung. Die Grenzen des Integrals sind $x_U = -8$ und $x_O = -0,5$, da die Querschnittsfläche durch die beiden Geraden $x = -8$ und $x = -0,5$, die parallel zur y-Achse laufen, begrenzt wird.



Da die zu berechnende Fläche unterhalb der x-Achse liegt, wie du der Abbildung oben entnehmen kannst, berechnest du den Betrag des Integrals, da negative Werte für Flächeninhalte keinen Sinn ergeben.

Bevor du den Flächeninhalt A_B der Querschnittsfläche berechnen kannst, solltest du den Funktionsterm von f_1 in eine Summe eines ganzrationalen Terms und eines Bruchterms zerlegen. Das kannst du mit einer Polynomdivision erreichen.

1. Schritt: Zerlegen des Funktionsterms von f_1

Der Funktionsterm von f_1 ist:

$$f_1(x) = \frac{x^2 + 3}{2x - 1}.$$

Zerlegst du diesen nun mit Hilfe einer Polynomdivision, so folgt:

$$\begin{array}{l} f_1(x) = \left(x^2 \qquad + 3 \right) : \left(2x - 1 \right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \dfrac{\frac{13}{4}}{2x-1} \\ \quad \underline{-x^2 + \frac{1}{2}x} \\ \qquad\quad \frac{1}{2}x + 3 \\ \qquad \underline{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}} \\ \qquad\qquad \frac{13}{4} \end{array}$$

Der Funktionsterm von f_1 kann also auch wie folgt geschrieben werden:

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4} + \frac{\frac{13}{4}}{2x-1} = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4} + \frac{13}{8x-4}.$$

2. Schritt: Berechnen des Flächeninhalts A_B des Querschnitts

Eine Integration über f_1 in den Grenzen $x_U = -8$ und $x_O = -0,5$ ergibt:

$$\begin{aligned} A_B &= \left| \int_{-8}^{-0,5} (f_1(x))\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{-8}^{-0,5} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{13}{8x-4} \right) \mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \left[\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{13}{8} \cdot \ln|8x-4| \right]_{-8}^{-0,5} \right| \\ &= \left| \left(\tfrac{1}{4} \cdot (-0,5)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (-0,5) + \tfrac{13}{8} \cdot \ln|8 \cdot (-0,5) - 4| \right) \right| - \left| \left(\tfrac{1}{4} \cdot (-8)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (-8) + \tfrac{13}{8} \cdot \ln|8 \cdot (-8) - 4| \right) \right| \\ &= \left| \left(\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{13}{8} \cdot \ln|-8| \right) \right| - \left| \left(16 - 2 + \tfrac{13}{8} \cdot \ln|-68| \right) \right| \\ &= \left| \left(-\tfrac{225}{16} + \tfrac{13}{8} \cdot (\ln(8) - \ln(68)) \right) \right| \approx 17,54\,\text{FE} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt der Querschnittsfläche des Brückenträgers beträgt ungefähr 17,54 Flächeneinheiten.

e) ► **Mittlerer Anstieg von G_1 berechnen** (9P)

In diesem Aufgabenteil sollst du den mittleren Anstieg des Graphen G_1 im Intervall $-8 \leq x \leq -4$ berechnen.

Den mittleren Anstieg m kannst du berechnen, indem du die Steigung der Sekante berechnest, die durch die beiden Punkte $P_1(-4|f_1(-4))$ und $P_2(-8|f_1(-8))$ verläuft. Wenn du die Steigung der Sekante berechnest, so bedeutet das, dass du die Steigung einer Geraden durch die beiden Punkte berechnest. Damit näherst du die Steigung von f_1 durch den mittleren Anstieg zwischen P_1 und P_2 im Intervall $[-8; -4]$ an.

Berechne also zum Lösen dieser Aufgabe zunächst die vollständigen Koordinaten von P_1 und P_2 und berechne dann über folgenden Ansatz den gesuchten mittleren Anstieg m:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, mit $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$.

1. Schritt: Bestimmen der vollständigen Koordinaten von P_1 und P_2

Setze $x_1 = -4$ und $x_2 = -8$ in den Funktionsterm von f_1 ein, um die vollständigen Koordinaten von P_1 und P_2 zu berechnen. Es ergibt sich:

$$f_1(-4) = \frac{(-4)^2 + 3}{2 \cdot (-4) - 1} = \frac{19}{-9} = -\frac{19}{9} \implies P_1(-4 \mid -\tfrac{19}{9})$$

$$f_1(-8) = \frac{(-8)^2 + 3}{2 \cdot (-8) - 1} = \frac{67}{-17} = -\frac{67}{17} \implies P_1(-8 \mid -\tfrac{67}{17})$$

2. Schritt: Berechnen des mittleren Anstiegs m

Den gesuchten mittleren Anstieg berechnest du nun über den oben aufgestellten Ansatz:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ mit $P_1(-4 \mid -\frac{19}{9})$ und $P_2(-8 \mid -\frac{67}{17})$

$$\begin{aligned} m &= \frac{-\frac{67}{17} - (-\frac{19}{9})}{-4} \\ &= \frac{-\frac{603}{153} + \frac{323}{153}}{-4} \\ &= \frac{-\frac{280}{153}}{-4} \\ &= \frac{70}{153} \end{aligned}$$

Der mittlere Anstieg von G_1 im Intervall $-8 \leq x \leq -4$ ist also $m = \frac{70}{153} \approx 0,4575$.

► Nachweis, dass sich mittlerer und maximaler Anstieg um weniger als 0,02 unterscheiden

In diesem Aufgabenteil sollst du zeigen, dass die untere Grenze des Brückenträgers aus Teilaufgabe d) auch als Gerade beschrieben werden kann, indem du nachweist, dass sich der mittlere Anstieg m und der maximale Anstieg von G_1 im Intervall $[-8; -4]$ um weniger als 0,02 unterscheiden.

Den mittleren Anstieg hast du oben schon berechnet, dieser war:

$m = \frac{70}{153} \approx 0,4575.$

Berechne hier also den maximalen Anstieg von f_1 im Intervall $[-8; -4]$. Das tust du, indem du zunächst die zweite Ableitung der Funktion f_1 betrachtest. Die zweite Ableitung von f_1 gibt die Steigung der Steigung an. Der maximale Anstieg von f_1 im untersuchten Intervall liegt folglich also da, wo die erste Ableitung f_1' ein Maximum bzw. die zweite Ableitung f_1'' eine Nullstelle besitzt.

Bestimme also zunächst die zweite Ableitungsfunktion f_1'' von f_1 und bestimme deren potentiellen Extremstellen bzw. die Wendestellen von f_1. Betrachte hierzu folgende Bedingung für eine Wendestelle bei x_W:

- Notwendige Bedingung: $f_1''(x_W) = 0$.
- Hinreichende Bedingung: $f_1'''(x_W) \neq 0$.

Können jedoch keine Wendestellen von f_1 im betrachteten Intervall gefunden werden, so musst du dieses auf Randmaxima von f_1' untersuchen. Betrachte dazu die Steigung an den Rändern des angegebenen Intervalls.

Hast du die Stellen mit der maximalen Steigung bestimmt, so berechnest du mit Hilfe der ersten Ableitungsfunktion f_1' die Steigung an jener Extrem- bzw. Wendestelle, welche im betrachteten Intervall liegt. Somit hast du den maximalen Anstieg berechnet.

Wenn du den maximalen Anstieg berechnet hast, so bildest du die Differenz zwischen diesem und dem mittleren Anstieg. Ist dieser kleiner als 0,02, dann lässt sich die untere Begrenzung des Brückenträgers durch eine Gerade beschreiben.

Gehe also so vor:

1. Schritt: Die zweite und dritte Ableitung von f_1 bestimmen

2. Schritt: Maximalen Anstieg ermitteln

3. Schritt: Differenz ermitteln und beurteilen

1. Schritt: Die zweite und dritte Ableitung von f_1 bestimmen

Die gesuchte zweite Ableitungsfunktion f_1'' ergibt sich mit $f_a''(x)$ und $a = 1$ zu:

$f_a''(x) = \dfrac{2a+24}{(2x-1)^3}$ mit $a = 1$:

$$f_1''(x) = \frac{26}{(2x-1)^3}$$

Den Term der dritten Ableitungsfunktion f_1''' von f_1 bestimmst du mit Hilfe der Quotientenregel:

$$f_1'''(x) = \frac{0 \cdot 26 - 26 \cdot 3 \cdot (2 \cdot x - 1)^2 \cdot 2}{((2x-1)^3)^2} = \frac{-156 \cdot (2 \cdot x - 1)^2}{(2x-1)^6} = \frac{-156}{(2x-1)^4}.$$

2. Schritt: Maximalen Anstieg berechnen

Den maximalen Anstieg berechnest du, indem du die zweite Ableitung mit Null gleichsetzt. Da die Gleichung $\dfrac{26}{(2x-1)^3} = 0$ keine Lösung besitzt, muss das gegebene Intervall auf Randmaxima der Steigung untersucht werden, da hier eben nur ein beschränktes Intervall betrachtet wird. Der maximale Anstieg liegt also an einer der Randstellen $x_1 = -8$ oder $x_2 = -4$ des gegebenen Intervalls. Jene Randstelle, mit der größeren Steigung, besitzt demnach den maximalen Anstieg.
Berechne also die Steigung an den Randstellen x_1 und x_2 durch Einsetzen dieser in den Term der ersten Ableitungsfunktion f_1':

$$f_1'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 6}{(2x-1)^2}$$

$$f_1'(-8) = \frac{2 \cdot (-8)^2 - 2 \cdot (-8) - 6}{(2 \cdot (-8) - 1)^2} = \frac{138}{289}$$

$$f_1'(-4) = \frac{2 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 6}{(2 \cdot (-4) - 1)^2} = \frac{34}{81}$$

Da $f_1'(-8) > f_1'(-4)$ gilt, liegt der maximale Anstieg mit $f_1'(-8) = \frac{138}{289} \approx 0,4775$ an der Randstelle $x_1 = -8$.

3. Schritt: Unterschied des mittleren und maximalen Anstiegs ermitteln

Um nun die Differenz der untersuchten Anstiege zu berechnen, subtrahierst du diese wie folgt voneinander:

$$\left| \frac{138}{289} - \frac{70}{153} \right| = \frac{52}{2.601} \approx 0,019992 < 0,02.$$

Somit unterscheiden sich der maximale und mittlere Anstieg von G_1 im gegebenen Intervall um weniger als 0,02. Deshalb kann die untere Grenze des Brückenträgers aus Teilaufgabe d) auch als Gerade beschrieben werden.