1.1 ▶ Funktion f bestimmen (8P)

Gesucht ist die Funktionsgleichung der Funktion, deren Graph die äußere Profillinie des in Material 1 dargestellten Gaubenfensters beschreibt. Der Funktionsterm von f ist allgemein gegeben durch:

$$f(x) = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x^2}$$

Dabei sind k und a die zwei gesuchten Parameter. Um zwei Unbekannte zu finden, werden genau zwei Bedingungen benötigt. Diese sind in der Aufgabenstellung genannt: Es ist vorgegeben, dass die Profillinie, also der Graph von f, durch die Punkte

$$P_1(-2,53 \mid 0,835) \quad \text{und} \quad P_2(3,57 \mid 0,39)$$

verlaufen muss. Du kannst nun die Koordinaten der beiden Punkte für x und $f(x)$ in die Funktionsgleichung einsetzen und erhältst ein Gleichungssystem mit den zwei Unbekannten k und a:

$$\text{I} \quad 0,835 = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot (-2,53)^2}$$

$$\text{II} \quad 0,39 = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot (3,57)^2}$$

Löse dieses Gleichungssystem nun über das Einsetzungsverfahren. Forme dazu beispielsweise Gleichung I nach Parameter k um und setze den resultierenden Term für k in Gleichung II ein. Diese löst du dann nach Parameter a und bestimmst so den gesuchten Parameterwert für a. Anschließend kannst du mit dem ermittelten Parameterwert für a den zugehörigen Parameterwert für k bestimmen.

1.2 ▶ Allgemeingültige Formel aufstellen (6P)

Um eine allgemeingültige Formel zur Berechnung des Parameters a aufzustellen, kannst du genauso vorgehen wie in Aufgabe 1.1 und dabei lediglich auf das Berechnen konkreter Werte verzichten und die Punktkoordinaten mit $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ benennen.

Dann lauten die beiden Gleichungen, die wir durch Einsetzen von P_1 und P_2 erhalten, wie folgt:

$$\text{I} \quad y_1 = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x_1^2}$$

$$\text{II} \quad y_2 = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x_2^2}$$

Forme nun wieder Gleichung I nach Parameter k um und setze das Ergebnis für k in II ein, um den Parameterwert für a allgemein zu bestimmen.

1.3 ▶ Lage des Maximums begründen (4 P)

Betrachte zunächst die Funktionsgleichung von f:

$$f(x) = 1,8 \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2}$$

Im Grunde handelt es sich hierbei um eine e-Funktion, mit einem negativen quadratischen Exponenten. Der Vorfaktor 1,8 streckt den Graphen der Funktion lediglich in y-Richtung und beeinflusst nicht die Lage des Maximums. Setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichung ein, so verschwindet der e-Term und der Faktor $-0,12$ ist nicht mehr von Bedeutung, da gilt:

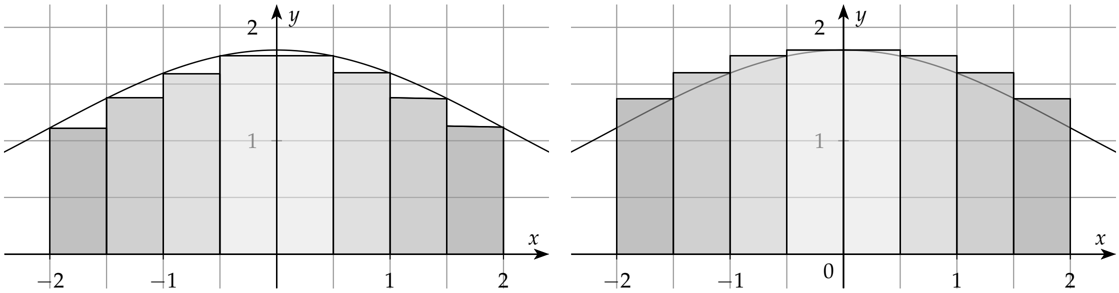
$$f(0) = 1,8 \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot 0^2} = 1,8 \cdot \underbrace{\mathrm{e}^0}_{=1} = 1,8$$

Für Werte größer oder kleiner Null wird der Exponent der e-Funktion negativ, da der x-Wert durch das Quadrieren zunächst positiv wird und dann durch das negative Vorzeichen wieder negativ. Du kannst nun zeigen, dass die Funktion für $x < 0$ streng monoton steigt und für $x > 0$ streng monoton fällt. Dann liegt das Maximum in jedem Fall bei $x = 0$.

2.1 ▶ Flächeninhalt näherungsweise bestimmen (6 P)

Gesucht ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f, der näherungsweise bestimmt werden soll. Dazu soll die Fläche in 8 Streifen unterteilt werden. Da das Koordinatensystem in Metern skaliert ist und das Intervall vier Einheiten groß ist, bietet es sich an, Streifen zu nehmen, die jeweils 0,5 m breit sind und dann das Obersummen/Untersummen-Verfahren zu verwenden.

Beim Obersummen/Untersummen-Verfahren für Näherungen von Flächeninhalten stellen die Streifen Rechtecke dar, die einmal unter und einmal über der Kurve abschließen, wie in den beiden Abbildungen unten zu sehen:



Das Verfahren nähert den Inhalt der Fläche unter der Kurve durch den Mittelwert zwischen der Obersumme A_O und der Untersumme A_U. Die Formel lautet daher:

$$A_{O/U} = \frac{A_O + A_U}{2}$$

Da die der Graph der Funktion symmetrisch zur y-Achse ist, haben in jeden Schaubild die jeweils farblich gleichen Rechtecke auch den gleichen Flächeninhalt, sodass wir für jede Summe nur vier Rechtecke berechnen müssen und das Ergebnis anschließend verdoppeln können. Die Breite ist für jedes der Rechtecke gleich und beträgt $b = 0{,}5\,\text{m}$. Die Höhen der Rechtecke sind für die Untersumme A_U gegeben durch die Funktionswerte von f bei $x_{1u} = -2,\ x_{2u} = -1{,}5,\ x_{3u} = -1$ und $x_{4u} = -0{,}5$. Für die Obersumme A_O sind dies $x_{1o} = -1{,}5,\ x_{2o} = -1,\ x_{3o} = -0{,}5$ und $x_{4o} = 0$.

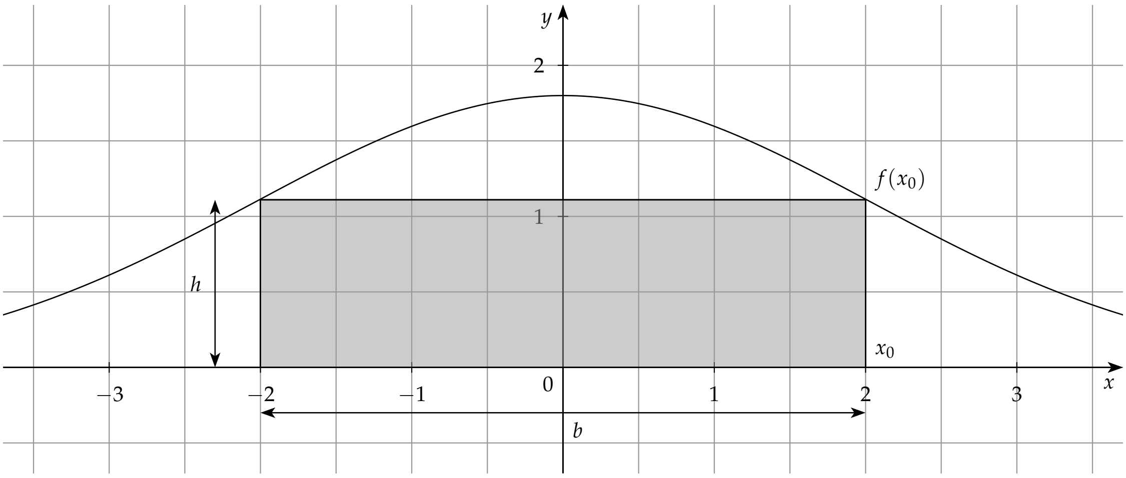
2.2 ▶ Abweichung berechnen und ein genaueres Näherungsverfahren erläutern (4 P)

Um die prozentuale Abweichung w des genäherten Wertes $A_{O/U}$ von dem des Computerprogramms zu berechnen, kannst du zunächst die Differenz der beiden Werte bestimmen und anschließend durch das genauere numerische Ergebnis A_N teilen.

Um einen genaueren Wert zu erhalten, kannst du das Obersummen/Untersummen-Verfahren modifizieren, indem du aus den Rechtecken Trapeze machst, deren obere Seiten nicht mehr parallel zur x-Achse verlaufen, sondern so, dass die Ecken des Trapezes die Kurve berühren.

3. **▶ Maße des Fensters mit maximalem Flächeninhalt bestimmen** (7P)

Gesucht sind die Maße eines in die Profillinie eingepassten Fensters, das den größtmöglichen Flächeninhalt besitzt.



Der Flächeninhalt des abgebildeten Rechtecks beträgt

$A = b \cdot h.$

Aufgrund der Symmetrie des Graphen von f reicht es hier, wenn du nur die rechte Seite des Rechtecks betrachtest. Es gilt also $x \geq 0$ und für die Breite des Rechtecks ergibt sich dann: $b = 2 \cdot x_0$. Die Höhe des betrachteten Rechtecks berechnet sich über Funktionswert von f an der Stelle x_0: $h = f(x_0)$. Mit diesen Angaben suchen wir das Maximum einer Funktion A, die den Flächeninhalt des Rechtecks in Abhängigkeit von x darstellt mit dem folgenden Funktionsterm:

$A(x) = b \cdot h = 2 \cdot x \cdot f(x) = 2 \cdot x \cdot 1,8 \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2} = 3,6 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-0,12 \cdot x^2}.$

Um das Maximum von A zu bestimmen, kannst du die Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion bestimmen und dann mithilfe der zweiten Ableitung prüfen, ob es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

4. **▶ Begründen, dass alle Wendepunkte auf Parallelen zur y-Achse liegen** (5 P)

Gesucht ist die Ortskurve h der Wendepunkte der Funktionenschar

$f_k(x) = k \cdot \mathrm{e}^{-\frac{3}{25}x^2}$

mit $k > 0$. Zu zeigen ist, dass h durch Parallelen zur y-Achse dargestellt werden kann, wie in Material 4 gezeigt.

Um die Gleichung der Ortskurven zu ermitteln, kannst du zunächst die Wendepunkte der Kurven von f_k ermitteln und anschließend ihre Lage im Koordinatensystem betrachten.

Für Wendestellen einer Funktion f_k gilt:

- Die zweite Ableitung f_k'' ist gleich Null. (notwendige Bedingung)
- Die dritte Ableitung f_k''' ist ungleich Null. (hinreichende Bedingung)

Bilde also zunächst die zweite und dritte Ableitungen von f_k, bestimme dann die Nullstellen von f_k'' und prüfe dann, ob die hinreichende Bedingung $f_k''' \neq 0$ erfüllt ist.