a) (1)► **Koordinaten von S nachweisen** (14 P)

Die Pyramide steht in der Mitte der Halle. Aus der Abbildung 1 kannst du entnehmen, dass sie von allen Seiten gleich weit entfernt steht.

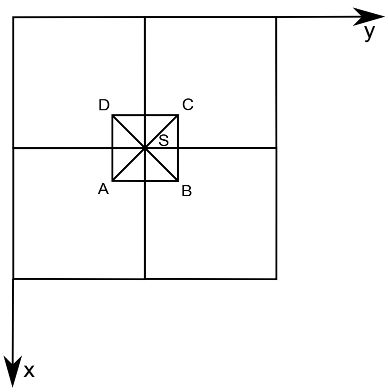
Folglich entspricht der Mittelpunkt des Hallenbodens der senkrechten Projektion des Mittelpunkts der Fläche $ABCD$ in die xy-Ebene.

Außerdem entspricht der Mittelpunkt von $ABCD$ der senkrechten Projektion von S auf $ABCD$. Somit entspricht der Mittelpunkt des Hallenbodens der senkrechten Projektion von S in die xy-Ebene.

Bestimme folglich die Koordinaten des Mittelpunkts des Hallenbodens und füge die Differenz der Höhe des Mittelpunkts der Halle zu S zu der z-Koordinate hinzu, um die Koordinaten von S zu erhalten.

- Mittelpunkt der Halle entspricht der senkrechten Projektion von S in die xy-Ebene
- $M(x_m \mid y_m \mid z_m) \Longrightarrow S(x_m \mid y_m \mid z_m + z_s)$
- Quadratische Grundfläche der Halle $\Longrightarrow x_m = y_m$

Betrachte den Grundriss der Halle, um die oben genannten Bedingungen zu unterstreichen.
Hier zeigt sich, dass die x- und y-Koordinaten von S mit denen des Mittelpunkts des Hallenbodens übereinstimmen.
Dies kannst du auch auf der Abbildung 1 erkennen.



Die Koordinaten kannst du über folgende Formel bestimmen:

$$x_m = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$x_m = y_m = 4,5$$

$$x_m = y_m = x_s = y_s = 4,5$$

Da der Mittelpunkt des Bodens der Halle eine Höhe von 0 hat, ergibt sich $S(4,5 \mid 4,5 \mid z_s)$.

z_s beschreibt den Abstand von S vom Boden. Da $ABCD$ einen Meter über den Boden liegt und S einen Meter über $ABCD$ ergibt sich für z_s folgender Term:

$$z_s = 1 + 1 = 2$$

Somit ergibt sich für $S(4,5 \mid 4,5 \mid 2)$. Folglich sind die Koordinaten bewiesen.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

(2)▶ Seitenlängen von *ABS* berechnen

Die Seitenlängen eines Dreiecks im dreidimensionalen Raum kannst du über die Länge der Vektoren, die die Seiten des Dreiecks bilden, bestimmen.
Die Länge eines Vektors $\overrightarrow{AB}$ bestimmst du über seinen Betrag mit $|\overrightarrow{AB}|$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

- Länge des jeweiligen Vektors beschreibt Seitenlänge
- Länge eines Vektors: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

Stelle zunächst die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{BS}$ auf.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4,5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4,5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stelle nun die Längen der Vektoren über die oben genannte Formel auf.

$|\overrightarrow{BS}| = \sqrt{(-0,5)^2+(-0,5)^2+1^2} = \sqrt{0,25+0,25+1} = \sqrt{1,5}$

$|\overrightarrow{AS}| = \sqrt{(-0,5)^2+(0,5)^2+1^2} = \sqrt{0,25+0,25+1} = \sqrt{1,5}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(0)^2+(0)^2+1^2} = \sqrt{0+0+1} = \sqrt{1} = 1$

Somit ergibt sich für die Seitenlängen:

$\overline{AB} = 1\,\text{m}$
$\overline{AS} = \sqrt{1,5}\,\text{m}$
$\overline{BS} = \sqrt{1,5}\,\text{m}$

(3)▶ Volumen der Pyramide bestimmen

Das Volumen einer Pyramide bestimmt sich allgemein über $V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h$. G beschreibt den Flächeninhalt der Grundfläche $ABCD$ der Pyramide und h die dazu senkrecht stehende Höhe.

- $V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h$
- $G = (\overline{AB})^2$
- h Abstand $ABCD$ zu S

Die Höhe der Pyramide ist bereits durch die Aufgabenstellung mit 1 m gegeben.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Den Flächeninhalt der Grundfläche kannst du über $(\overline{AB})^2$ berechnen, da es sich um eine quadratische Grundfläche handelt und die Formel für den Flächeninhalt quadratischer Flächen lautet $A = a^2$.

$G = (\overline{AB})^2 = 1^2 = 1$

$h = 1$

$V = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$

Somit ergibt sich ein Volumen der Pyramide mit $V = \frac{1}{3}\,\mathrm{m}^3$.

▶ Oberflächeninhalt der Pyramide bestimmen

Die allgemeine Oberflächenformel für Pyramiden lautet $O = G + M$, wobei G der Flächeninhalt der Grundfläche und M die Mantelfläche ist.

Die Mantelfläche setzt sich in diesem Fall aus 4 gleichen Dreiecken mit dem Flächeninhalt D zusammen. Daher gilt für die Mantelfläche folgende Formel.

$M = 4 \cdot D$

Den Flächeninhalt von Dreiecken im dreidimensionalen kannst du über $D = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{BS}|$ bestimmen, wobei $\overrightarrow{BS}$ und $\overrightarrow{AS}$ zwei der Dreiecksseiten sind.

Dies ist darin begründet, dass $|\overrightarrow{BS} \times \overrightarrow{AS}|$ den Flächeninhalt eines Parallelograms beschreibt, dass parallele Seiten der Länge $\overline{BS}$ und $\overline{AS}$ besitzt.

Folglich ist die Hälfte davon der Flächeninhalt des Dreiecks.

- $O = G + M$
- $M = 4 \cdot D$
- $D = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{BS}|$

Berechne zunächst das Kreuzprodukt von $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{BS}$, um im Anschluss D zu bestimmen.

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 0,5 - (-0,5) \\ -0,5 - (-0,5) \\ 0,25 - (-0,25) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{d}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0,5^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1,25}$$

Somit ergibt sich für die Oberfläche folgender Term:

$$O = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1,25} \approx 3,24\,\mathrm{m}^2$$

Folglich beträgt die Oberfläche der Pyramide $3,24\,\mathrm{m}^2$.

b) **▶ Koordinaten der Eckpunkte ermitteln** (12 P)

Die Lichtquelle scheint die Seitenfläche BCS direkt an. Daher werden ihre Eckpunkte als Eckpunkte des Schattendreiecks direkt an die Wand mit der Koordinatengleichung $y = 0$ geworfen.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Die Eckpunkte werden durch die Strahlen der Lampe L und durch den jeweiligen Eckpunkt definiert.

Bilde Geraden aus L und B, C und S, die du dann mit der Ebene $y = 0$ schneiden lässt und so die Schatteneckpunkte erhältst.

Die Geradengleichungen stellst du auf über

$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OL} + t \cdot \overrightarrow{LC}$

wobei $\overrightarrow{LC}$ der Richtungsvektor ist, den du wie folgt bestimmst.

$\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OL}$

- Geraden durch L und B, C und S
- Schnitt mit der Ebene $y = 0$
- Schnittpunkte bilden Schattenpunkte der Ecken

Stelle zunächst die Geradengleichungen der 3 Geraden LS, LB und LC nach obiger Formel auf.

Bilde dazu zunächst die Richtungsvektoren $\overrightarrow{LS}$, $\overrightarrow{LB}$ und $\overrightarrow{LC}$.

$$\overrightarrow{LS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4,5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4,5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4,5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4,5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stelle nun die Geradengleichungen auf.

$$LS: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$LB: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$LC: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die Schnittpunkte mit der $y = 0$ Ebene zu finden, musst du für y die y-Koordinate der jeweiligen Geraden setzen. Daraus ergeben sich die folgenden 3 Gleichungen.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$0 = 9 - s \cdot 4,5 \qquad | -9 \qquad | :(-4,5)$

$2 = s$

$0 = 9 - 4 \cdot t \qquad | -9 \qquad | :(-4)$

$\frac{9}{4} = t$

$0 = 9 - 4 \cdot r \qquad | -9 \qquad | :(-4)$

$\frac{9}{4} = r$

Setze nun die eben berechneten Parameter in die Geradengleichungen ein und berechne so die Schnittpunkte mit der $y = 0$-Ebene.

$$LS: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$LB: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{9}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,625 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$LC: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{9}{4} \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,375 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ergeben sich die Schatteneckpunkte mit $S'(4,5 \mid 0 \mid 3)$, $B'(5,625 \mid 0 \mid 1)$ und $C'(3,375 \mid 0 \mid 1)$.

► Zeigen, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt

Ein Dreieck ist dann gleichschenklig, wenn zwei der Seiten gleichlang sind.

Es muss gelten $|\overrightarrow{S'C'}| = |\overrightarrow{S'B'}|$ oder $|\overrightarrow{C'B'}| = |\overrightarrow{S'C'}|$ oder $|\overrightarrow{C'B'}| = |\overrightarrow{S'B'}|$.

Die Länge eines Vektors bestimmst du über $|\overrightarrow{S'C'}| = \sqrt{(s_1 - c_1)^2 + (s_2 - c_2)^2 + (s_3 - c_3)^2}$

Berechne zunächst die Längen der einzelnen Seiten.

$|\overrightarrow{C'S'}| = \sqrt{(4,5 - 3,375)^2 + 0^2 + (3-1)^2} \approx \sqrt{1,266 + 4} = \sqrt{5,266}$

$|\overrightarrow{B'S'}| = \sqrt{(4,5 - 5,625)^2 + 0^2 + (3-1)^2} \approx \sqrt{1,266 + 4} = \sqrt{5,266}$

$|\overrightarrow{C'B'}| = \sqrt{(5,625 - 3,375)^2 + 0^2 + (1-1)^2} = \sqrt{5,0625}$

Folglich gilt $|\overrightarrow{B'S'}| = |\overrightarrow{C'S'}|$, sodass das Dreieck gleichschenklig ist.

► Flächeninhalt des Dreiecks bestimmen

Die Fläche eines Dreiecks kannst du über die Formel $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ berechnen. a beschreibt die Strecke zwischen den Punkten B' und C', während h den Abstand von S' zu a darstellt.

Berechne den Abstand von B' nach C' über $a = \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2 + (b_3 - c_3)^2}$.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Da $a = \overline{B'C'}$, $\overline{B'C'} \parallel x$-Achse und $C' \in \overline{B'C'}$ sowie $B' \in \overline{B'C'}$, gilt $h = z_S - z_B$.

Berechne zunächst h.

$h = 3 - 1 = 2$

Bestimme nun den Abstand von C' und B' über die oben genannte Formel.

$a = \sqrt{(5,625 - 3,375)^2 + (0-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2,25^2 + 0^2 + 0^2} = 2,25$

Setze dies nun in die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts mit $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ ein.

$A = \frac{1}{2} \cdot 2,25 \cdot 2 = 2,25 \cdot 1 = 2,25$

Somit hat dieses gleichschenklige Dreieck einen Flächeninhalt von $2,25\,\text{m}^2$.

c) (1)▶ **Eigenschaft von M beweisen** (16 P)

Die Seitenhalbierende einer Dreiecksseite $\overline{AB}$ halbiert die Seite $\overline{AB}$ im Punkt M_{AB}, den du

über $\overrightarrow{OM_{AB}} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ bestimmen kannst.

Außerdem verläuft die Seitenhalbierende durch den der Seite $\overline{AB}$ gegenüberliegenden Punkt S.
Über S und M_{AB} kannst du folglich den Vektor $\overrightarrow{SM_{AB}}$ aufstellen, der die Seitenhalbierende darstellt.

Den Mittelpunkt der Seitenhalbierenden kannst du dann über $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_{AB}} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{SM_{AB}}$ bestimmen.

- M_{AB} über $\overrightarrow{OM_{AB}} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ bestimmen
- Seitenhalbierende als Vektor $\overrightarrow{CM_{AB}}$ darstellen
- M über $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{SM_{AB}}$ bestimmen

Bestimme zunächst den Punkt M_{AB}. Stelle dazu den Vektor $\overrightarrow{AB}$ auf.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setze dies nun in die Formel zu Berechnung von M_{AB} ein.

$$\overrightarrow{OM_{AB}} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich M_{AB} mit den Koordinaten $M_{AB}(5 \mid 4,5 \mid 1)$.
Stelle nun die Seitenhalbierende der Seite $\overline{AB}$ als Vektor $\overrightarrow{SM_{AB}}$ dar.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$$\overrightarrow{SM_{AB}} = \overrightarrow{OM_{AB}} - \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4,5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Über $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{SM_{AB}}$ kannst du nun den Punkt M bestimmen, der den Mittelpunkt der Seitenhalbierenden darstellt und die Koordinaten $M(4,75 \mid 4,5 \mid 1,5)$ haben soll.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{SM_{AB}} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4,5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,75 \\ 4,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich der Mittelpunkt M der Seitenhalbierenden von $\overline{AB}$ mit $M(4,75 \mid 4,5 \mid 1,5)$.

Folglich ist dieser bewiesen.

(2)▶ **Zeigen, dass der Lichtstrahl entlang von $\overrightarrow{l}$ läuft**

Als gegebene Bedingung ist gegeben, dass der Richtungsvektor des Lichtstrahls orthogonal zur Fläche ABS stehen soll.

Jeder Vektor, der orthogonal zu einer Ebene steht, kann als ein Vielfaches des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ der Ebene betrachtet werden.

Folglich muss gelten $\overrightarrow{n} \triangleq \overrightarrow{l}$, damit die Aufgabenstellung erfüllt ist.

Stelle zunächst die Ebene ABS mit

$$ABS: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AS}$$

auf und bilde im Anschluss über das Kreuzprodukt $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}$ den Normalenvektor der Ebene.

- $\overrightarrow{n} \triangleq \overrightarrow{l}$
- $ABS: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AS}$
- $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}$

Stelle zunächst die Gleichung der Ebene ABS auf. Die Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AS}$ werden wie folgt gebildet.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Richtungsvektoren.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4,5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus resultiert die folgende Parametergleichung der Ebene ABS.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$$ABS: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bilde nun das Kreuzprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}$, um den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene zu bestimmen.

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-0 \\ 0+0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit gilt $\overrightarrow{n} \widehat{=} \overrightarrow{l}$. Folglich ist bewiesen, dass der zur Ebene ABS orthogonale Lichtstrahl den Richtungsvektor $\overrightarrow{l}$ besitzt.

▶ Position der Laser-Lichtquelle ermitteln

Wie du anhand der Abbildungen 2 und 3 sehen kannst, ist die Pyramidenseite ABS zu der Hallenseite hin gerichtet, die parallel zur $x = 0$ Ebene auf der Höhe $x = 9$ verläuft.
Folglich befindet sich die Laser-Lichtquelle an dieser Hallenseite.

Somit kannst du den Ort der Lichtquelle als Schnittpunkt des Lichtstrahls, dargestellt durch die Gerade l, mit dieser Hallenseite, die die x-Achse an der Stelle $x = 9$ schneidet, bestimmen.

- ABS ist der $x = 9$ Ebene zugewandt
- Schnittpunkt von l und $x = 9$ entspricht Laser-Lichtquelle
- $l: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM} + r \cdot \overrightarrow{l}$

Stelle zunächst die Gerade l auf.

$$l: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM} + r \cdot \overrightarrow{l} = \begin{pmatrix} 4,75 \\ 4,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setze nun die x-Koordinate in die Ebenengleichung ein, sodass du folgende Gleichung erhältst.

$$\begin{aligned} 9 &= 4,75 + r \cdot 2 \qquad && | -4,75 \\ 4,25 &= r \cdot 2 && | :2 \\ 2,125 &= r \end{aligned}$$

Setze den Parameter r wieder in die Geradengleichung ein, sodass du den Schnittpunkt L und damit die Position der Laser-Lichtquelle bestimmst.

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 4,75 \\ 4,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + 2,125 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4,5 \\ 3,625 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich L mit $L(9 \mid 4,5 \mid 3,625)$.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

d) (1)▶ **Punkte von E^* einzeichnen** (8 P)

Die Angabe, dass alle Punkte eingezeichnet werden sollen, sagt aus, dass du die Schnittgeraden der Seitenflächen bzw. der Decke und des Bodens mit der Ebene E^* einzeichnen sollst.

Dafür benötigst du einige Punkte, die dir zum Teil schon mit F und G gegeben sind. Aus den Verbindungsstrecken dieser Punkte kannst du dann die Schnittgeraden bestimmen.

Du benötigst 2 Punkte, die in der Dachfläche liegen und gleichzeitig auf der Oberkante einer der Seitenflächen, und 2 Punkte, die in der Bodenfläche liegen und gleichzeitig auf der Unterkante der selben Seitenflächen liegen wie die Punkte in der Dachfläche.

- Punkte auf Bodenfläche und Dachfläche definieren
- Verbindungsstrecken der Punkte sind Schnitte der Ebene mit der Halle
- Schnitte mit Boden und Decke verlaufen parallel
- Schnitte mit den einzelnen Seitenwänden verlaufen parallel
- Schnitte mit der Vorder- und Rückwand verlaufen parallel

Du kannst zunächst die 2 Punkte F und G einzeichnen, die aufgrund ihrer z-Koordinate in der Dachfläche liegen. Trage dazu nacheinander ihre $x-$, y- und z-Koordinaten ab.

Einen weitern Punkt erhältst du über den Spurpunkt der Ebene E^* auf der x-Achse. Hier sind alle Koordinaten außer der x-Koordinate gleich 0. Setze folglich die y- und z-Koordinate gleich 0 und löse nach r bzw. s auf.

$$\begin{aligned} 0 &= 5 + 0 \cdot r - 2 \cdot s \\ 0 &= 5 - 2 \cdot s && \mid -5 \\ -5 &= -2 \cdot s && \mid :-2 \\ 2,5 &= s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + r + 0 \cdot s \\ 0 &= r \cdot s \end{aligned}$$

Setze die Werte für r und s in die x-Koordinate ein, um den Spurpunkt mit den Koordinaten $P(x \mid 0 \mid 0)$ zu bestimmen. Daraus folgt folgende Gleichung.

$x = 3 + 0 + 2,5 \cdot 1 = 5,5$

Somit ergibt sich der Spurpunkt mit $P(5,5 \mid 0 \mid 0)$. Zeichne auch diesen in das Koordinatensystem ein. Er liegt in der Bodenfläche der Halle.

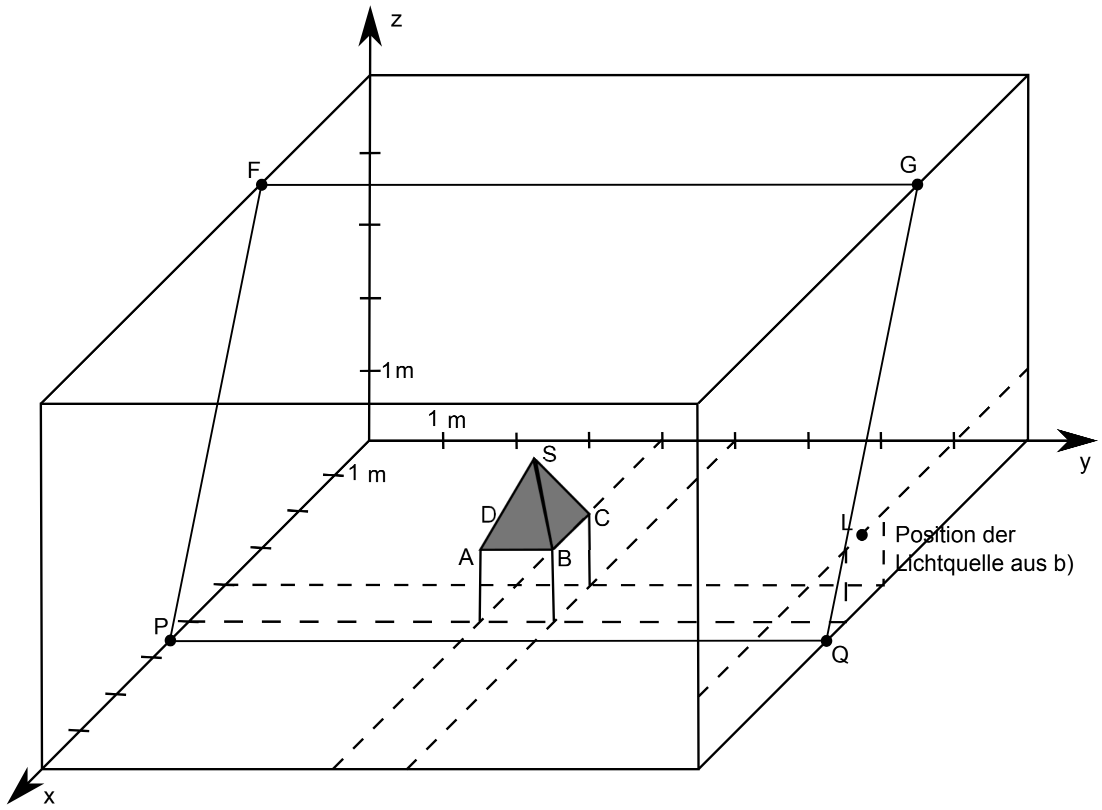
Nun benötigen wir noch einen 4. Punkt Q, um alle Schnitte zeichnen zu können. Aus den oben genannten Bedingungen muss aber gelten $\overline{FG} \parallel \overline{PQ}$ sowie $\overline{FP} \parallel \overline{GQ}$.

Ziehe daher eine Parallele von $\overline{FG}$ durch P sowie eine Parallele von $\overline{FP}$ durch G.

Der Schnittpunkt beschreibt dann den Punkt Q.

Daraus ergibt sich folgendes Bild.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.



(2)▶ **Schnittgerade *g* bestimmen**

Die Schnittgerade zweier Ebenen, von denen eine in Parameterform und eine in der Koordinatenform vorliegt, bestimmst du, indem du die Koordinaten aus der Parameterform in die Koordinatenform einsetzt.

Für zwei allgemeine Ebenen ergeben sich folgende Gleichungen.

$$E_1: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} o1 \\ o2 \\ o3 \end{pmatrix}$$

$E_2: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$

$E_1 = E_2$

$$a \cdot (p1 + r \cdot q1 + s \cdot o1) + b \cdot (p2 + r \cdot q2 + s \cdot o2) + c \cdot (p3 + r \cdot q3 + s \cdot o3) = d$$

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Löse dies nach einem der Parameter auf und setze diesen in die Parametergleichung ein.
So erhältst du deine Schnittgerade.

- E_1 in E_2 einsetzen, wenn E_1 in Paramterform und E_2 in Koordinatenform
- $a \cdot (p1 + r \cdot q1 + s \cdot o1) + b \cdot (p2 + r \cdot q2 + s \cdot o2) + c \cdot (p3 + r \cdot q3 + s \cdot o3) = d$ nach einem Parameter auflösen
- Parameter in E_1 einsetzen

Gegeben sind die Ebenen E^* und E_{BCS}. E^* liegt in Parameterform vor. Setze E^* in E_{BCS} ein.

$$\begin{aligned} 2 \cdot (0 + r + 0 \cdot s) + 1 \cdot (5 + 0 \cdot r - 2 \cdot s) &= 11 \\ 2 \cdot r + 5 - 2 \cdot s &= 11 \qquad | -5 \\ 2 \cdot r - 2 \cdot s &= 6 \qquad | : 2 \\ r - s &= 3 \qquad | +s \\ r &= 3 + s \end{aligned}$$

Setze diesen Parameter nun in die Gleichung von E^* ein. Daraus ergibt sich für g folgender Term.

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + (3 + s) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vereinfacht erhältst du:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

▶ Entscheiden, ob $\overline{BS}$ auf g liegt

Damit die Kante $\overline{BS}$ auf g liegt, müssen beide Punkte B und S auf g liegen. Es muss folglich gelten $B \in g$ und $S \in g$. Dies kannst du mittels Einsetzen prüfen. Es muss gelten $s_1 = s_2 = s_3$.

Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen für $B \in g$:

$$\begin{array}{lrcll} \text{I} & 5 &=& 3 + s_1 & | -3 \\ \text{II} & 5 &=& 3 + s_2 & | -3 \\ \text{III} & 1 &=& 5 - 2 \cdot s & | -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{I} & 2 &=& s_1 & \\ \text{II} & 2 &=& s_2 & \\ \text{III} & -4 &=& -2 \cdot s & | : (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{III} & 2 &=& s_3 \end{array}$$

Somit gilt $s_1 = s_2 = s_3$. Folglich liegt B auf g.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Prüfe nun den Punkt S.

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 4{,}5 = 3 + & s_1 & \mid -3 \\
\text{II} & 4{,}5 = 3 + & s_2 & \mid -3 \\
\text{III} & 2 = 5 - & 2 \cdot s & \mid -5
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 1{,}5 = & s_1 & \\
\text{II} & 1{,}5 = & s_2 & \\
\text{III} & -3 = & -\ 2 \cdot s & \mid :(-2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{llc}
\text{III} & 1{,}5 = & s_3
\end{array}$$

Somit gilt auch für S die Bedingung $s_1 = s_2 = s_3$. Demnach liegt auch S auf g, sodass für die Strecke $\overline{BS}$ gilt $\overline{BS} \in g$.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.