a) ► **Symmetrie des Graphen begründen** (11P)

Im Funktionsterm von f treten nur gerade Exponenten auf, daher ist der Graph von f symmetrisch zur y-Achse.

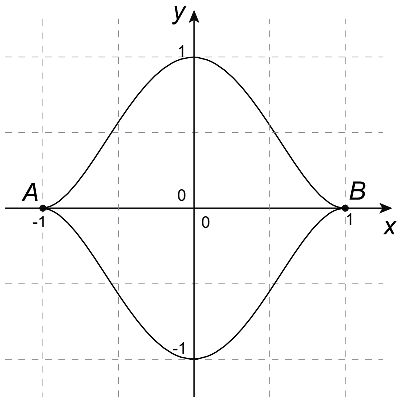
► **Funktionsgleichung von f aufstellen**

Du sollst anhand des Funktionsterms begründen, dass der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist.
Beim Graphen einer ganzrationalen Funktion, ist dies der Fall, wenn nur gerade Exponenten im Funktionsterm auftreten. Im Funktionsterm von f ist dies der Fall, daher ist der Graph von f symmetrisch zur y-Achse.

► **Funktionsgleichung von f aufstellen**

Du sollst einen Funktionsterm von f aufstellen und hast folgende Informationen gegeben:

1. Die Steigung des Graphen von f in den beiden Punkten A und B soll jeweils den Wert Null haben.
2. f soll folgende Form haben: $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$.



Du musst also die Parameterwerte von a, b und c bestimmen. Dazu benötigst du drei Gleichungen, mit deren Hilfe du ein Gleichungssystem aufstellen kannst.

Dieses kannst du dann mit dem CAS lösen und so die Parameterwerte von a, b und c bestimmen. Zwei der drei Gleichungen kannst du aufstellen, indem du die Koordinaten zweier Punkte aus dem Schaubild abliest. Die dritte erhältst du mit Hilfe der Information 1.

1. Schritt: Gleichungssystem aufstellen

Aus der Anlage kannst du ablesen, dass für f gelten soll: $f(1) = 0$ und $f(0) = 1$.
Damit ergeben sich die beiden Gleichungen:
I $f(0) = 1$
II $f(1) = 0$.
Außerdem kannst du der Aufgabenstellung entnehmen, dass die Steigung des Graphen von f in den Punkten A und B Null sein soll. Die **Steigung** des Graphen einer Funktion f wird durch deren **erste Ableitung** f' beschrieben.
Du erhältst dann die Gleichung:
III $f'(1) = 0$.

2. Schritt: Gleichungssystem lösen

Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich mit dem CAS lösen. Definiere dazu zuerst $f(x)$ in Abhängigkeit von a, b und c und anschließend $f'(x)$ als `d1f(x)`. Den Befehl für „Ableiten" findest du unter `menu → 4: Analysis → 1: Ableitung`

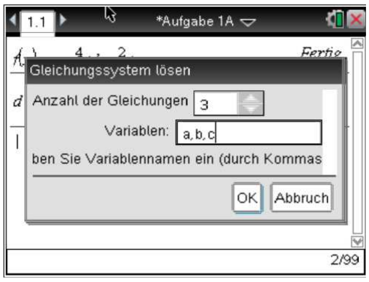
Anschließend kannst du das lineare Gleichungssystem lösen. Den Befehl dazu findest du unter `menu → 3 → 7 → 1`.

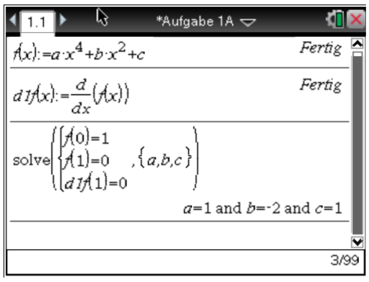
Gib dort die Anzahl der Gleichungen (3) und die Unbekannten (a, b, c) ein und bestätige mit `OK`. Anschließend kannst du die drei Gleichungen eingeben und mit `enter` bestäitgen.

Du erhältst dann das Ergebnis:

$a = 1, b = -2$ und $c = 1$.

Ein Term der Funktion f lautet $f(x) = x^4 - 2 \cdot x^2 + 1$.





► Funktionsgleichung von g aufstellen

Nun sollst du einen Term der Funktion g aufstellen, deren Graph durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse entsteht.

Soll der Graph einer Funktion f an der x-Achse gespiegelt werden, so bedeutet das für den Funktionsterm von g:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $g(x) = -f(x)$.

Das heißt:

$g(x) = -f(x) = -(x^4 - 2 \cdot x^2 + 1) = -x^4 + 2 \cdot x^2 - 1$.

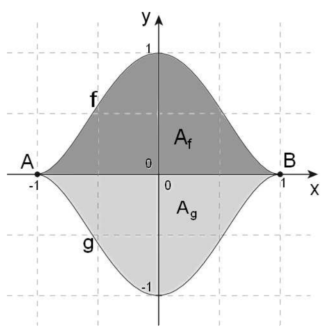
Ein Term der Funktion g lautet $g(x) = -x^4 + 2 \cdot x^2 - 1$.

b) **► Materialkosten berechnen** (10P)

Du sollst überprüfen, ob die Forderung eingehalten werden kann, dass die Materialkosten für das Logo höchstens 75 € betragen sollen, wenn das Material 34 € je Quadratmeter kostet. Dazu musst du die gesamten Materialkosten K berechnen:

$K = A \cdot P$, wobei A der Flächeninhalt des Logos und P der Preis pro Quadratmeter ist.

Dabei gilt: $A = A_f + A_g$, wie du auf dem Schaubild rechts sehen kannst. Wegen der Symmetrie von f und g gilt: $\left|A_f\right| = \left|A_g\right| \Rightarrow A = 2 \cdot A_f$



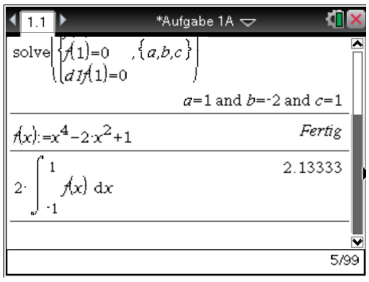
Berechne also zuerst den Inhalt der Fläche A_f und darüber den Flächeninhalt A. Anschließend kannst du die Materialkosten berechnen.

1. Schritt: Flächeninhalt berechnen

Die Fläche mit Inhalt A_f wird vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen, das heißt, es gilt: $A_f = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$.

Die Grenzen x_1 und x_2 sind dabei die Nullstellen der Funktion f. In der Abbildung erkennst du: $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.
Es gilt also: $A = 2 \cdot \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

Das Integral kannst du mit dem CAS berechnen, indem du $f(x)$ neu mit den berechneten Parametern a, b und c definierst. Den Befehl für ein Integral findest du unter `menu → 4: Analysis → 3: Integral`.
Du erhältst das Ergebnis:
$A = 2 \cdot \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx 2,13$.



2. Schritt: Materialkosten berechnen

Für die gesamten Materialkosten des Logos ergibt sich nun mit $P = 34\,€$ pro Quadratmeter:
$K = A \cdot 34 = 2,13 \cdot 34 = 72,42$.
Die Gesamtmaterialkosten für das Logo betragen $72,42\,€$. Demnach wird die erste Forderung erfüllt.

► Größte Steigung des oberen Randes berechnen

Du sollst nun überprüfen, ob die Forderung erfüllt werden kann, dass die größte Steigung des oberen Randes des Logos mindestens $1,5$ betragen soll.
Der obere Rand des Logos wird durch den Graphen der Funktion f dargestellt. Das bedeutet, du sollst überprüfen, ob die maximale Steigung des Graphen von f zwischen den beiden Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ mindestens $1,5$ beträgt. Die Steigung des Graphen von f wird durch die erste Ableitung f' von f beschrieben.
Berechne also das Maximum von f' und vergleiche es mit dem geforderten Wert. Überprüfe anschließend, ob dies zwischen den beiden Nullstellen von f liegt.

Maximum berechnen

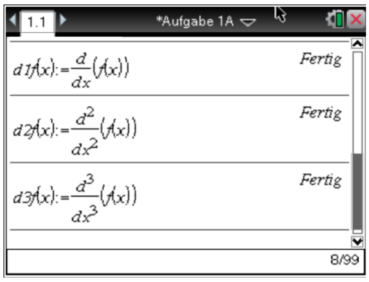
Für eine Maximalstelle x_M der Funktion f' gibt es zwei Kriterien:

- **Das notwendige Kriterium**: $f''(x_M) = 0$.
- **Das hinreichende Kriterium**: $f'''(x_M) < 0$.

Gehe also wie folgt vor:

- 1. Schritt: Bilde $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ im CAS.
- 2. Schritt: Wende das notwendige Kriterium an, um mögliche Maximalstellen von f' zu ermitteln.
- 3. Schritt: Überprüfe das hirneichende Kriterium für die möglichen Maximalstellen.
- 4. Schritt: Berechne die maximale Steigung $f'(x_M)$.

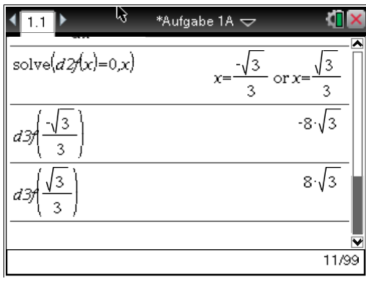
1. Schritt: Ableitungen bilden



Du kannst die Ableitungen f', f'' und f''' wie oben im CAS als `d1f(x)`, `d2f(x)` und `d3f(x)` definieren.

2. Schritt: Notwendiges Kriterium anwenden

Setze dazu nun $f''(x) = 0$ und löse diese Gleichung mit dem `solve`-Befehl in deinem CAS.
Du erhältst dann das Ergebnis:
$x_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



3. Schritt: Hinreichendes Kriterium überprüfen

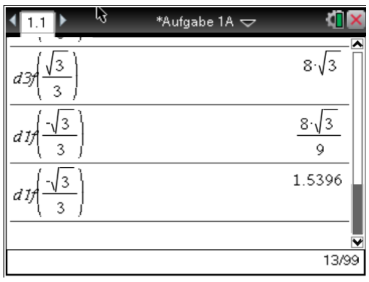
Setze nun die möglichen Maximalstellen x_1 und x_2 mit dem CAS in $f'''(x)$ ein und überprüfe so, ob es sich tatsächlich um Maximalstellen von f' handelt.

Du erhältst die Ergebnisse:
$f'''\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = -8 \cdot \sqrt{3} < 0$ und $f'''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 8 \cdot \sqrt{3} \geq 0$.
Somit ist $x_M = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ eine tatsächliche Maximalstelle von f' und liegt zwischen den beiden Nullstellen von f. An dieser Stelle ist die Steigung von f maximal.

4. Schritt: Maximale Steigung berechnen

Die Maximale Steigung von f ist der Funktionswert der ersten Ableitung f' an der Maximalstelle x_M.

Berechne nun also $f'\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ mit dem CAS.
Du erhältst das Ergebnis:
$f'\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8\cdot\sqrt{3}}{9} \approx 1{,}54 > 1{,}5$.
Der Funktionswert des Maximums der ersten Ableitung von f ist größer als $1{,}5$. Zudem liegt das Maximum zwischen den beiden Nullstellen. Damit ist auch die zweite Forderung erfüllt.



c) ▶ **Geraden in das Koordinatensystem einzeichnen** (13P)

Das Logo soll durch die beiden Geraden $g_1(x) = x$ und $g_2(x) = -x$ in vier Flächenstücke geteilt werden. Du sollst nun die beiden Geraden g_1 und g_2 in das Koordinatensystem in der Anlage zeichnen.

Aus den Funktionstermen der Geraden kannst du den y-Achsenabschnitt, sowie die Steigung ablesen. Eine Gerade g mit dem Funktionsterm $g(x) = a \cdot x + b$ hat die Steigung a und den y-Achsenabschnitt b.

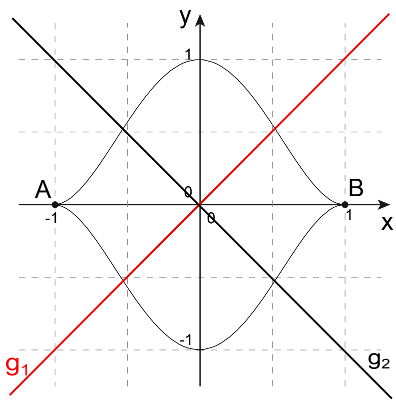
Über die Geraden $g_1(x) = x$ hast du demnach folgende Informationen gegeben:

- Die Steigung ist 1.
- Der y-Achsenabschnitt ist 0.

Die Gerade g_1 hat demnach die Eigenschaft: $y = x$ für alle Punkte auf der Geraden g_1. Demnach ist g_1 die Winkelhalbierende des Schnittwinkels der beiden Koordinatenachsen im 1. und 3. Quadranten.

Für die Gerade $g_2(x) = -x$ gilt entsprechend:

- Die Steigung ist -1.
- Der y-Achsenabschnitt ist 0.



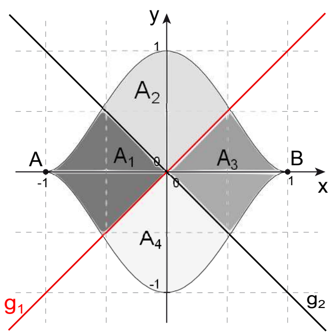
Die Gerade g_2 hat demnach die Eigenschaft: $y = -x$ für alle Punkte auf der Geraden g_2. Demnach ist g_2 die Winkelhalbierende des Schnittwinkels der beiden Koordinatenachsen im 2. und 4. Quadranten.
Mit Hilfe dieser Informationen kannst du nun die Geraden in das Koordinatensystem einzeichnen.

▶ **Größe der Flächenstücke berechnen**

Du sollst nun, die Größe der vier Flächenstücke A_1, A_2, A_3 und A_4 berechnen, die rechts in der Graphik eingezeichnet sind.

Du hast folgende Informationen:

- Die Graphen von f und g sind symmetrisch zur y-Achse.
- Der Graph von g entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse.
- Anhand der Funktionsterme kannst du sehen, dass für die Geraden g_1 und g_2 ebenfalls gilt $g_1(x) = -g_2(x)$. Die Gerade g_1 entsteht also durch Spiegelung der Geraden g_2 an der x-Achse bzw. an der y-Achse.



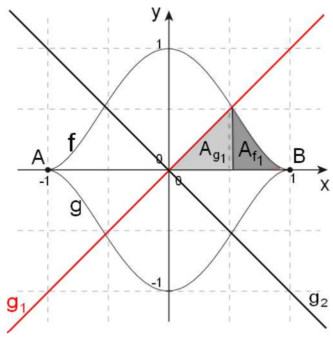
Daraus folgt:
- $A_1 = A_3$
- $A_2 = A_4$

A_1 und A_3

Berechne zuerst den Flächeninhalt A_3 und damit auch den Flächeninhalt A_1.

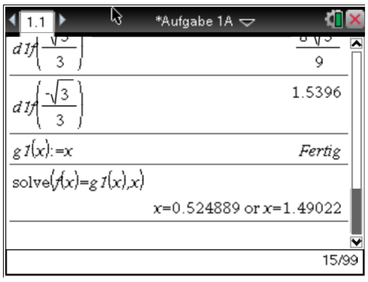
Der Flächeninhalt A_3 setzt sich zusammen aus zwei Teilflächeninhalten. Den Inhalt der Teilfläche oberhalb der x-Achse und den der Teilfläche unterhalb der x-Achse.

Wegen der Symmetrie des Logos, sind diese Teilflächen gleich groß. Berechne also zunächst nur den Inhalt der oberen Teilfläche und verdopple diesen anschließend. Die obere Teilfläche kannst du wieder in zwei Teilflächen aufteilen:

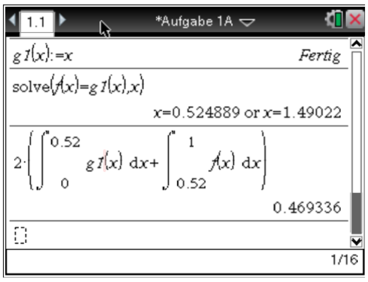


- A_{g_1}: Der Inhalt der Fläche zwischen der Geraden g_1 und der x-Achse vom Ursprung bis zum Schnittpunkt S_1 von g_1 mit dem Graphen von f.
- A_{f_1}: Der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse vom Schnittpunkt S_1 bis zur Nullstelle von f.

Damit gilt dann insgesamt: $A_1 = A_3 = 2 \cdot \left(A_{g_1} + A_{f_1}\right)$, wobei:
$A_{g_1} = \int_0^{x_2} g_1(x)\mathrm{d}x$ und $A_{f_1} = \int_{x_2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, da die Nullstelle von f bei $x = 1$ liegt.



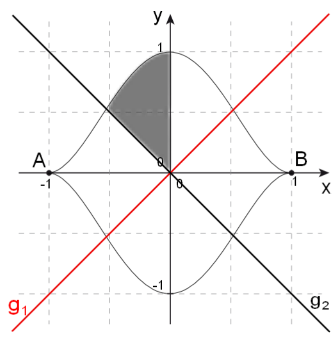
x_2 ist die Schnittstelle von f und g_1. Diese musst du zunächst noch mit dem CAS berechnen. Definiere dazu $g_1(x)$ als `g1(x)` in deinem CAS und löse die Gleichung $f(x) = g_1(x)$ mit dem `solve`-Befehl.



Das CAS liefert dir das Ergebnis:
$x_2 = 0{,}52$. Das zweite Ergebnis, liegt außerhalb des Bereichs und kann deshalb ausgeblendet werden.
Damit kennst du nun auch $x_2 = 0{,}52$. Die beiden Integrale kannst du nun wie oben mit dem CAS berechnen.
Tust du dies nacheinander für A_{g_1} und A_{f_1} erhältst du das Ergebnis:

$$A_1 = 2 \cdot (\int_0^{0{,}52} g_1(x)\mathrm{d}x + \int_{0{,}52}^{1} f(x)\mathrm{d}x) \approx 0{,}47$$

A_2 und A_4



Berechne nun den Flächeninhalt A_2 und damit auch den Flächeninhalt A_4. Das Flächenstück A_2 setzt sich ebenfalls aus zwei symmetrischen und damit gleichgroßen Flächenstücken zusammen: Das Teilstück links der y-Achse und das Teilstück rechts der y-Achse. Betrachte demnach zuerst nur das rechte Teilstück der Fläche A_2 und verdopple dessen Inhalt anschließend.

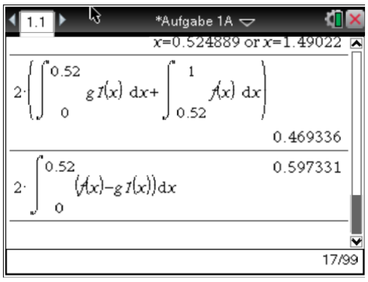
Bei dem Flächenstück rechts der y-Achse handelt es sich um die Fläche zwischen dem Graphen von f und dem Graphen von g_1 vom Ursprung bis zum Schnittpunkt S_1.

Den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Graphen von zwei Funktionen f und g berechnest du über das Integral:

$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) \mathrm{d}x \right|.$

In diesem Fall sind die Grenzen der Ursprung ($x_1 = 0$) und die Schnittstelle ($x_2 = 0,52$).

Damit ergibt sich: $A_2 = 2 \cdot \left| \int_0^{0,52} (f(x) - g_1(x)) \mathrm{d}x \right|$. Das Integral kannst du wie oben mit dem CAS berechnen.
Du erhältst dann das Ergebnis: $A_4 = A_2 \approx 0,60$.
Die Flächenstücke A_1 und A_3 sind jeweils ca. $0,47\ \mathrm{m}^2$ groß. Die Flächenstücke A_2 und A_4 sind jeweils ca. $0,6\ \mathrm{m}^2$ groß.



▶ Geradengleichung bestimmen

Du sollst Funktionsterme der Ursprungsgeraden aufstellen, die durch die Wendepunkte des Graphen von f verlaufen. Eine Ursprungsgerade u durch einen Punkt $P(x_P \mid y_P)$ hat allgemein die Form:
$u(x) = \frac{y_P}{x_P} \cdot x.$
Berechne zuerst die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f und setze diese anschließend in den oben stehenden Funktionsterm ein.

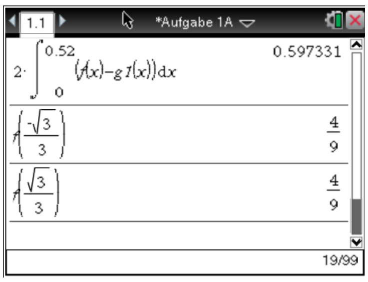
1. Schritt: Wendepunkte bestimmen

Die Koordinaten der Wendepunkte W_1 und W_2 des Graphen von f kannst du mit dem CAS berechnen.
Für eine Wendestelle x_W von f gibt es wieder zwei Kriterien:

- **Das notwendige Kriterium**: $f''(x_W) = 0$
- **Das hinreichende Kriterium**: $f'''(x_W) \neq 0$

Au Aufgabenteil b) kennst du bereits die Stellen für die dies gilt:
$x_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ mit
$f''\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = 0\,,\, f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$ und
$f'''\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) < 0\,,\, f'''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0.$
Damit sind dies Wendestellen von f.

Berechne nun noch die zugehörigen y-Koordinaten, indem du x_1 und x_2 in $f(x)$ mit dem CAS einsetzt.
Du erhältst dann das Ergebnis:
$f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{9},$
$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{9}.$
Damit lauten die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f $W_1\left(\frac{-\sqrt{3}}{3} \mid \frac{4}{9}\right)$ und $W_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \mid \frac{4}{9}\right)$.



2. Schritt: Geradengleichungen aufstellen.

Du weißt, dass die Geradengleichung durch den Wendepunkt W_1 folgende Form hat:
$u_{W_1}(x) = \frac{y_{W_1}}{x_{W_1}} \cdot x$. Weil der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist, entsteht der Wendepunkt W_2 durch Spiegelung von W_1 an der y-Achse. Aus den gleichen Gründen wie oben muss dann auch für die Ursprungsgerade durch W_2 gelten: $u_{W_2}(x) = -u_{W_1}(x)$.
Setze dort nun die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f ein und stelle so die Geradengleichungen auf:

$u_{W_1}(x) = \frac{y_{W_1}}{x_{W_1}} \cdot x = \frac{0{,}445}{0{,}577} \cdot x \approx 0{,}77 \cdot x$,
$u_{W_2}(x) = -u_{W_1}(x) = -0{,}77 \cdot x$.
Die Gleichungen der Ursprungsgeraden durch die Wendepunkte des Graphen von f lauten :
$u_{W_1}(x) = 0{,}77 \cdot x$ und $u_{W_2}(x) = -0{,}77 \cdot x$.

d) ▶ **Abhängigkeit der x-Koordinaten zeigen** (10P)

Du sollst zeigen, dass für jedes k und $x > 0$ die x-Koordinate des Wendepunktes des Graphen von f_k immer dasselbe Vielfache der x-Koordinate des Tiefpunktes ist.

Die Funktionenschar f_k ist dir gegeben mit $f_k(x) = k \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 1$.

Berechne zuerst die x-Koordinaten der Tiefpunkte der Graphen von f_k (x_T) und anschließend die Koordinaten der Wendepunkte der Graphen von f_k (x_W).

Zeige anschließend, dass x_W immer dasselbe Vielfache von x_T ist.

Wenn dies der Fall ist, muss für ein konstantes a gelten: $a \cdot x_T = x_W$. Um die Behauptung zu zeigen, berechne also a und zeige so, dass a konstant ist, also nicht von k abhängt.

1. Schritt: x-Koordinaten der Tiefpunkte berechnen

Um die x-Koordinaten der möglichen Tiefpunkte zu berechnen, wende dazu das notwendige Kriterium an. Bilde dazu zuerst die erste Ableitung $f_k'(x)$ von f_k, setze anschließend $f_k'(x) = 0$.

Die erste Ableitung f_k' von f_k kannst du mit Hilfe der Ableitungsregeln bilden:
$f_k'(x) = 4 \cdot k \cdot x^3 - 4 \cdot x$.

Setze den Funktionsterm nun gleich Null und löse nach x auf:
$0 = 4 \cdot k \cdot x^3 - 4 \cdot x = x \cdot (4 \cdot k \cdot x^2 - 4)$.

Mit dem Satz vom Nullprodukt kannst du bereits darauf schließen, dass eine mögliche Lösung $x_1 = 0$ ist. Untersuche nun wann der zweite Faktor 0 wird:

$$\begin{aligned} 0 &= 4 \cdot k \cdot x^2 - 4 && \mid +4 \\ 4 &= k \cdot x^2 && \mid : k \; (k > 0) \\ \tfrac{4}{k} &= x^2 && \mid \sqrt{} \end{aligned}$$

$x_2 = +\sqrt{\frac{4}{4 \cdot k}} = +\sqrt{\frac{1}{k}}$ und $x_3 = -\sqrt{\frac{4}{4 \cdot k}} = -\sqrt{\frac{1}{k}}$.

Du weißt nun, dass die möglichen Tiefpunkte bei $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{1}{k}}$ und $x_3 = -\sqrt{\frac{1}{k}}$ liegen. Zudem ist in der Aufgabenstellung $x > 0$ vorgegeben. Damit bleibt nur noch $x_2 = \sqrt{\frac{1}{k}}$ als gesuchte Minimalstelle übrig. Dir ist auch in der Aufgabenstellung vorgegeben, dass die Graphen von f_k für $x > 0$ einen Tiefpunkt besitzen. Damit musst du das hinreichende Kriterium nun nicht mehr überprüfen, und kennst nun die x-Koordinaten der Tiefpunkte der Graphen von f_k mit $x_T = \sqrt{\frac{1}{k}}$.

2. Schritt: x-Koordinaten der Wendepunkte berechnen

Um die x-Koordinaten der möglichen Wendepunkte der Graphen von f_k zu berechnen, wende zunächst das notwendige Kriterium an. Bilde dazu die zweite Ableitung $f_k''(x)$ von f_k mit Hilfe der Ableitungsregeln, setze anschließend $f_k''(x) = 0$.

$f_k''(x) = 12 \cdot k \cdot x^2 - 4$. Setze nun $f_k''(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= 12 \cdot k \cdot x^2 - 4 && \mid +4 \\ 4 &= 12 \cdot k \cdot x^2 && \mid :(12 \cdot k) \\ \frac{1}{3 \cdot k} &= x^2 && \mid \sqrt{} \\ x_1 &= +\sqrt{\frac{1}{3 \cdot k}} \\ x_2 &= -\sqrt{\frac{1}{3 \cdot k}} \end{aligned}$$

Die möglichen Wendepunkte der Graphen von f_k liegen demnach bei $x_1 = +\sqrt{\frac{1}{3 \cdot k}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3 \cdot k}}$. Hier gilt das gleiche wie bei den Minimalstellen. Damit musst du hier ebenfalls nicht das hinreichende Kriterium überprüfen und kennst die x-Koordinate des Wendepunktes der Graphen von f_k mit $x_W = +\sqrt{\frac{1}{3 \cdot k}}$ für $x > 0$.

3. Schritt: Vergleichen der x-Koordinaten

Zeige nun, dass $a \cdot x_T = x_W$ für ein konstantes a gilt. Um die Behauptung zu zeigen, berechne also a und zeige so, dass a konstant ist, also nicht von k abhängt.

$$\begin{aligned} a \cdot x_T &= x_W \\ a \cdot \sqrt{\frac{1}{k}} &= \sqrt{\frac{1}{3 \cdot k}} && \mid {}^2 \\ a \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} &= \frac{1}{\sqrt{3 \cdot k}} && \mid \cdot \sqrt{k} \\ a &= \frac{1}{\sqrt{3 \cdot k}} \cdot \sqrt{k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Die x-Koordinate des Wendepunkts des Graphen von f_k ist immer das $\frac{1}{\sqrt{3}}$-fache der x-Koordinate des Tiefpunktes des Graphen von f_k für $x > 0$.