a) **▶ Ebenengleichung in Parameterform ermitteln** (5P)

Betrachte die Punkte $A(3\,|-1\,|\,2)$, $B(7\,|\,2\,|\,11)$ und $C(3\,|\,3\,|\,14)$.
Deine Aufgabe ist es, eine Ebenengleichung in Parameterform einer Ebene E aufzustellen, die die Punkte A, B und C beinhaltet.

Stelle die Gleichung der Ebene E in Parameterform auf, indem du von den Punkten $A(3\mid-1\mid2)$, $B(7\mid2\mid11)$ und $C(3\mid3\mid14)$ den Ortsvektor eines Punktes auswählst und diesen als Stützvektor verwendest. Wir wählen den Stützvektor $\overrightarrow{OA}$. Ausgehend von diesem ausgewählten Punkt kannst du zwei nicht kollineare Spannvektoren $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ bezüglich der anderen beiden Punkten ermitteln. In unserem Fall wären das zum Beispiel die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$.

Beachte, dass du für die Parametergleichung einer Ebene zwei Parameter, hier t und s, einführen musst.
Eine Parametergleichung der Ebene E mit $t, s \in \mathbb{R}$ lautet beispielsweise:

$$\boldsymbol{E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{o} + s \cdot \overrightarrow{u} + t \cdot \overrightarrow{v}},$$

wobei $\overrightarrow{o}$ den Stützvektor sowie $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ die Spannvektoren darstellen.

▶ Entwickeln einer Gleichung für die Ebene *E* in Normalenform

Ermittle nun eine Gleichung für die Ebene E in Normalenform.

Der Unterschied zwischen Normalenform und Parameterform liegt darin, dass bei der Parametergleichung die Ebene E durch Spannvektoren aufgespannt wird. Die Normalengleichung bestimmt dahingegen die Ebene E durch einen Normalenvektor $\overrightarrow{n}$, welcher senkrecht auf jedem Punkt der Ebene E steht.
Damit der Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ senkrecht auf jedem Punkt der Ebene steht, muss er folglich auch senkrecht auf den beiden Spannvektoren der Ebenengleichung der Ebene E in Parameterform stehen.

Lösungsweg A (Skalarprodukt):
Du kannst den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ bestimmen, indem du die beiden Spannvektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ aus dem ersten Abschnitt der Teilaufgabe verwendest und $\overrightarrow{n}$ so berechnest, dass

$\boldsymbol{\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{u} = 0}$ **und** $\boldsymbol{\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{v} = 0}$

gilt, denn zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist.
Aus diesen Bedingungen kannst du dann einen Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ ermitteln.

Lösungsweg B (Vektorprodukt):
Alternativ kannst du auch das Vektorprodukt zum Ermitteln des Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ verwenden. In diesem Fall gilt für den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ folgende Beziehung:

$\boldsymbol{\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}$

Beachte aber, dass du noch einen Stützvektor $\overrightarrow{o}$ benötigst.

Für die Ebenengleichung E in Normalenform gilt folgende Gleichung:

$\boldsymbol{E: \left[\overrightarrow{x} - \overrightarrow{o}\right] \circ \overrightarrow{n}} = 0$

b) ▶ **Nachweisen, dass A, B, C und D in einer Ebene liegen** (4P)

Gegeben sind die Punkte $A(3 \mid -1 \mid 2)$, $B(7 \mid 2 \mid 11)$, $C(3 \mid 3 \mid 14)$ und $D(-1 \mid 2 \mid 11)$.

In diesem Aufgabenteil sollst du überprüfen, ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene E liegen.

Da du bereits in Teilaufgabe a eine Ebenengleichung der Ebene E in Normalenform für die Ebene E aufgestellt hast, kannst du diese hier verwenden.
Du kannst natürlich auch die Ebenengleichung der Ebene E in Parameterform verwenden, musst aber bei dieser noch zusätzlich die entsprechenden Parameterwerte für t und s ermitteln, was mehr Aufwand entspricht.

Beachte: Die Ebene E ist die Ebene, in der die Puntke A, B und C liegen. Prüfe also, ob der Punkt D mit $D(-1 \mid 2 \mid 11)$ auf dieser Ebene liegt.
Die Ebenengleichung der Ebene E in Normalenform lautet wie folgt:

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{x} - 5 = 0.$$

Um zu zeigen, dass der Punkt D in der Ebene E liegt, kannst du eine Punktprobe durchführen.
Setze dazu den Ortsvektor des Punktes $D(-1 \mid 2 \mid 11)$ in die Ebenengleichung in Normalenform der Ebene E für $\overrightarrow{x}$ ein und überprüfe, ob sich eine wahre Aussage ergibt.

▶ **Nachweis, dass A, B, C, D Eckpunkte eines Drachenvierecks mit Symmetrieachse AC sind**

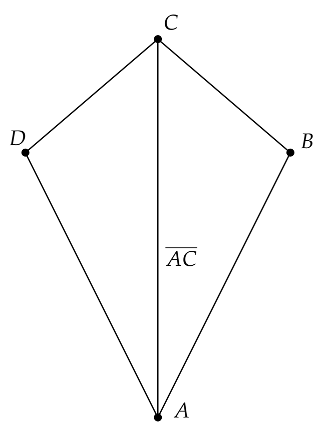
Betrachte wieder die Punkte $A(3 \mid -1 \mid 2)$, $B(7 \mid 2 \mid 11)$, $C(3 \mid 3 \mid 14)$ und $D(-1 \mid 2 \mid 11)$.

In diesem Aufgabenteil sollst du zeigen, dass die Punkte A, B, C und D die Eckpunkte eines Drachenvierecks sind, wobei die Gerade, die durch die Punkte A und C verläuft, die Symmetrieachse des Drachenvierecks darstellt.

Ein Drachenviereck ist dadurch definiert, dass eine Diagonale des Vierecks eine Symmetrieachse ist.

Sofern die Diagonale $\overline{AC}$ die Symmetrieachse ist, wie in der Aufgabenstellung gefordert wird, so muss für alle vier Seitenlängen gelten, dass immer je zwei gegenüberliegende Seitenlängen gleich lang sind.

Insbesondere muss in diesem Fall gelten, dass $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|$ und $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$ erfüllt wird.



c) ▶ **Bestimmen der Koordinaten für den Punkt A^*** (6P)

Betrachte das Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(3 \mid -1 \mid 2)$, $B(7 \mid 2 \mid 11)$, $C(3 \mid 3 \mid 14)$ und $D(-1 \mid 2 \mid 11)$ aus dem Aufgabenteil zuvor.
Der Punkt A^* wird nun vom Punkt A aus auf der Symmetrieachse AC in Richtung des Punktes C verschoben. Dabei bildet A^* laut Aufgabenstellung mit den beiden Eckpunkten B und D ein gleichschenkliges Dreieck.

Hierbei sollst du die Koordinaten des Punktes A^* so bestimmen, dass das gleichschenklige Dreieck einen Basiswinkel α von $30°$ hat.

Willst du die Koordinaten eines solchen Punktes A^* bestimmen, so ist es hilfreich, zuerst die allgemeinen Koordinaten des Punktes A^* anzugeben. Dieser befindet sich, wie du weißt, auf einer Geraden, die durch die Punkte A und C verläuft.
Stelle also zunächst die Geradengleichung g durch die Punkte A und C auf und setze diese Gleichung für die x-, y- und z-Koordinate des Punktes A^* ein.
Erinnerung: Eine Geradengleichung sieht folgendermaßen aus:

$\boldsymbol{\overrightarrow{g} = \overrightarrow{o} + t \cdot \overrightarrow{u}; t \in \mathbb{R}},$

wobei $\overrightarrow{o}$ dem Ortsvektor und $\overrightarrow{u}$ dem Richtungsvektor entspricht.

Der Basiswinkel α ist derjenige Winkel, der von den Strecken $\overline{BA^*}$ und $\overline{BD}$ eingeschlossen wird. Da es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handeln soll, kannst du natürlich auch die Strecken $\overline{DA^*}$ und $\overline{BD}$ betrachten. Wir behandeln die Aufgabenstellung aber anhand der erst genannten Stecken $\overline{BA^*}$ und $\overline{BD}$.

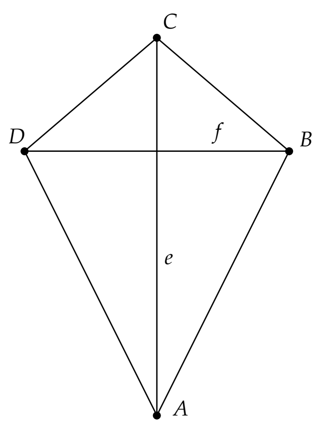
Allgemein gilt: Schließen zwei Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ einen Winkel α ein, so gilt für diesen Winkel α:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}; 0 \leq \alpha \leq 180^\circ}.$$

Soll nun die Bedingung erfüllt sein, dass die Strecken $\overline{BA^*}$ und $\overline{BD}$ einen Basiswinkel α von $30\,^\circ$ einschließen, so kannst du die Strecken $\overline{BA^*}$ und $\overline{BD}$ in die obige Gleichung einsetzen und überprüfen, für welche Werte der Winkel $\alpha = 30^\circ$ beträgt. Da die Strecke $\overline{BA^*}$ vom allgemein angegebenen Punkt A^* abhängt, erhältst du beim Lösen der Gleichung einen Wert für t, sodass des Basiswinkel $\alpha = 30\,^\circ$ beträgt.
Damit hast du außerdem die Koordinaten des gesuchten Punktes A^* ermittelt, da dieser vom Parameter t abhängt.

d) ▶ **Bestimmen des Flächeninhalts A_D des Drachenvierecks $ABCD$** (7P)

Sei $ABCD$ das aus Teilaufgabe b betrachtete Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(3 \mid -1 \mid 2)$, $B(7 \mid 2 \mid 11)$, $C(3 \mid 3 \mid 14)$ und $D(-1 \mid 2 \mid 11)$ und der Symmetrieachse $\overline{AC}$.



Bestimme in diesem Aufgabenteil den Flächeninhalt A_D des Drachenvierecks $ABCD$.
Der Flächeninhalt A_D eines solchen Drachenvierecks wird allgemein durch

$\boldsymbol{A_D = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f}$

beschrieben, wobei e und f jeweils die Diagonalen zwischen den Eckpunkten darstellen.
Berechne die Längen der Diagonalen e und f und verwende schließlich diese Beziehung für den Flächeninhalt A_D des Drachenvierecks $ABCD$.

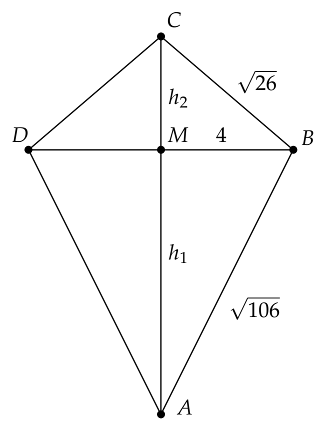
▶ Berechnen des Volumens V_K

Betrachte das Drachenviereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(3 \mid -1 \mid 2)$, $B(7 \mid 2 \mid 11)$, $C(3 \mid 3 \mid 14)$ und $D(-1 \mid 2 \mid 11)$ und der Symmetrieachse $\overline{AC}$.
Das Drachenviereck soll nun um seine Symmetrieachse $\overline{AC}$ rotieren. Durch diese Rotation entsteht ein Doppelkegel.
Deine Aufgabe ist es, das Volumen V_K des entstandenen Doppelkegels K zu berechnen.

Um das Volumen V_K zu berechnen, kannst du zuerst den Doppelkegel K in zwei einzelne Kegel K_1 und K_2 aufteilen und deren Volumen V_{K1} bzw. V_{K2} separat berechnen. Für das Volumen V_K von K gilt dann folglich:

$$\boldsymbol{V_K = V_{K1} + V_{K2}}.$$

K_1 beschreibt hierbei den Kreiskegel, der durch die Rotation des Dreiecks ABD um die Symmetrieachse $\overline{AC}$ entsteht und K_2 denjenigen Kreiskegel, der durch Rotation von DBC entsteht.
Das heißt, der Rotationskörper besteht aus zwei **geraden** Kreiskegeln K_1 und K_2, da das Drachenviereck $ABCD$ an seiner Symmetrieachse $\overline{AC}$ gespiegelt werden kann, ohne dass sich eine der Seiten dabei verändert.
Daraus kannst du außerdem folgern, dass die Höhen h_1 und h_2 der beiden Kreiskegel K_1 und K_2 zusammen die Länge der Symmetrieachse $\overline{AC}$ ergeben. Berechne die Höhen h_1 und h_2, indem du diese Eigenschaft ausnutzt.



Ermittle anschließend die Volumina für jeden Kegel einzelnen mit folgender allgemeinen Formel für das Volumen von Kreiskegeln:

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h},$$

wobei r den Radius und h die Höhe des jeweiligen Kreiskegels beschreibt.
Sofern du die Volumina V_{K1} und V_{K2} der beiden Kreiskegel K_1 und K_2 ermittelt hast, addiere diese, um das Volumen V_K vom Doppelkreiskegel K zu erhalten.

e) **▶ Nachweisen, dass Gerade g und Ebene E einen Schnittpunkt S besitzen** (4P)

Gegeben sei die Ebene E in Parameterform

$$E: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

für $s, t \in \mathbb{R}$ und die Gerade g sei gegeben durch

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

für $r \in \mathbb{R}$.

In diesem Aufgabenteil musst du zeigen, dass die Ebene E und die Gerade g genau einen Schnittpunkt S haben.

Um dies nachzuweisen, kannst du zuerst die Koordinatenform der Ebenengleichung der Ebene E aufstellen. Anschließend kannst du g als Vektor umformen und die von r abhängigen Koordinaten in die zuvor aufgestellte Koordinatengleichung der Ebene E einsetzen. Ermittle mögliche Parameterwerte für r, für die sich die Gerade g und die Ebene E schneiden.
Erhältst du genau einen möglichen Parameterwert für r, so kannst du davon ausgehen, dass es folglich auch nur genau einen Schnittpunkt S geben kann.

Ist der Wert für den Parameter r ermittelt, so kannst du diesen Wert in die Geradengleichung von g für r einsetzen und erhältst den Ortsvektor für den gesuchten Schnittpunkt S.

▶ Prüfen, ob Schnittpunkt S auf $\overline{AC}$ liegt

Betrachte den Schnittpunkt $S(3 \mid 0 \mid 5)$ der Geraden g und Ebene E und die Symmetrieachse $\overline{AC}$. In diesem Aufgabenteil sollst du überprüfen, ob der Schnittpunkt $S(3 \mid 0 \mid 5)$ auf der Symmetrieachse $\overline{AC}$ liegt.

Um das untersuchen zu können, musst du beachten, dass der Schnittpunkt $S(3 \mid 0 \mid 5)$ auf der **Strecke $\overline{AC}$** liegt und nicht allgemein auf einer Geraden durch A und C liegt, denn diese kann über die Strecke $\overline{AC}$ hinaus gehen.
Stelle also dazu eine geeignete Gleichung ac auf, die nur die Punkte beschreibt, die auf der Strecke $\overline{AC}$ liegen.

Setze anschließend den Ortsvektor des Schnittpunktes $S(3 \mid 0 \mid 5)$ mit der aufgestellten Streckengleichung ac gleich und überprüfe, ob der Schnittpunkt $S(3 \mid 0 \mid 5)$ auf der Strecke $\overline{AC}$ liegt.

f) **▶ Begründen, dass sich der Drache um die Achse $\overrightarrow{BD}$ gedreht hat** (4P)

Betrachte das Drachenviereck $ABCD$. Dieses Drachenviereck stellt nun einen realen Drachen dar, wobei 1 LE im Modell 10 cm in der Wirklichkeit entspricht. Der Drachen steigt nun 30 m in die Höhe, wodurch seinen Eckpunkten neue Koordinaten zugewiesen werden mit $A'(3 \mid -27 \mid 308)$, $B'(7 \mid -18 \mid 311)$, $C'(3 \mid -15 \mid 312)$ und $D'(-1 \mid -18 \mid 311)$.
Durch den Steigungsvorgang hat sich der Drache gedreht.

Du sollst hierbei begründen, dass er sich um seine Achse $\overline{BD}$ gedreht hat.

Damit sich der Drache um die Achse $\overline{BD}$ gedreht hat, musst du zeigen, dass die Vektoren vom Startpunkt B bzw. D zum Ausgangspunkt B' bzw. D' gleich sind. Ist das nicht der Fall, so hat sich die Achse $\overline{BD}$ im Steigungsprozess geneigt und der Drache kann sich folglich nicht um diese gedreht haben.
Zeige also, dass $\boldsymbol{\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DD'}}$ gilt.