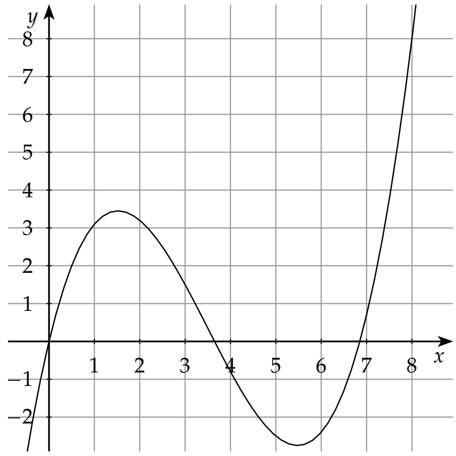
Ein quaderförmiges Wasserbecken mit 3 m Länge, 2 m Breite und 2 m Höhe hat einen Wasserzulauf und einen Wasserablauf.

Die Funktion f mit $f(x) = 0{,}2 \cdot x^3 - 2{,}1 \cdot x^2 + 5 \cdot x$, $0 \leq x \leq 8$, beschreibt modellhaft die Änderungsrate der Wassermenge in diesem Becken.
Dabei werden x in Stunden und $f(x)$ in Kubikmeter pro Stunde angegeben.
Zu Beginn ist das Becken leer.

In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph von f dargestellt.



a) Berechnen Sie die Änderungsrate nach 2 Stunden. (11P)
Ermitteln Sie die Zeitabschnitte, in denen die Wassermenge im Becken zu- beziehungsweise abnimmt.
Berechnen Sie $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ und dokumentieren Sie hierzu einen Lösungsweg, der ohne Einsatz des Rechners nachvollziehbar ist.
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

b) Begründen Sie mithilfe der Grafik in der oben angegebenen Abbildung, dass sich nur zu Beginn kein Wasser im Becken befindet. (12P)
Bestimmen Sie den ersten Zeitpunkt, zu dem das Becken genau zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist.
Ermitteln Sie die maximale Wassermenge im Becken innerhalb des betrachteten Zeitintervalls von 8 Stunden.

c) Bei gleichen Ausgangsbedingungen soll die Änderungsrate der Wassermenge nun modellhaft durch die folgende zusammengesetzte Funktion h beschrieben werden: (11P)

$$h(x) = \begin{cases} f(x) = 0{,}2 \cdot x^3 - 2{,}1 \cdot x^2 + 5 \cdot x & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ g(x) = -x + 5{,}2 & \text{für } 2 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion h an der Übergangsstelle stetig und differenzierbar ist.
Ermitteln Sie die Wassermenge sowie die Höhe des Wasserstandes im Becken nach 8 Stunden.

d) Unabhängig vom Sachzusammenhang wird im Folgenden die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = 0{,}2 \cdot x^3 - k \cdot x^2 + 5 \cdot x$, $k > 0$, $x \in \mathbb{R}$, betrachtet. (10P)
Bei den Graphen dieser Schar werden die Tangenten t_k in den Punkten $P_k(5|f_k(5))$ betrachtet.
Ermitteln Sie für $k = 2{,}1$ eine Gleichung dieser Tangente. Dokumentieren Sie hierzu einen Lösungsweg, der ohne Einsatz des Rechners nachvollziehbar ist.
Im Folgenden können Sie ohne Nachweis verwenden, dass für die Tangenten t_k gilt:
$t_k(x) = (20 - 10 \cdot k) \cdot x + 25 \cdot k - 50$.
Untersuchen Sie, ob sich alle Tangenten t_k in einem Punkt schneiden.