Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 3x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f ist in der Abbildung auf der nächsten Seite dargestellt.

a) (1) Weisen Sie nach, dass der Graph von f symmetrisch zum Ursprung O ist. (9P)

(2) Ermitteln Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte der Funktion f.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = (1 - 2x^2) \cdot 3\mathrm{e}^{-x^2}$]

b) (1) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit der Gleichung $F(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion der Funktion f ist. (9P)

(2) In a) (2) ergibt sich, dass der Punkt $H(0,5\sqrt{2} \mid 1,5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-0,5})$ ein Hochpunkt der Funktion f ist. Es kann vorausgesetzt werden, dass die Ursprungsgerade OH den Graphen der Funktion f im I. Quadranten nur in den Punkten O und H schneidet.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von f und der Ursprungsgeraden OH im I. Quadranten eingeschlossen wird.

c) Im Punkt $A(1 \mid f(1))$ bzw. im Punkt $B(-1 \mid f(-1))$ wird jeweils die Tangente t_A bzw. die Tangente t_B an den Graphen von f gelegt. (17P)

(1) Bestimmen Sie eine Gleichung der beiden Tangenten t_A und t_B.

(2) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Tangenten t_A und t_B mit den Koordinatenachsen.

[Zur Kontrolle: Die Tangente t_A schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten $A_x(2 \mid 0)$ und $A_y\left(0 \mid \frac{6}{\mathrm{e}}\right)$.]

Die Schnittpunkte aus c) (2) ergeben ein Viereck.

(3) Erstellen Sie eine geeignete Skizze.

(4) Begründen Sie, dass das genannte Viereck eine Raute ist.

(5) Berechnen Sie den Flächeninhalt des genannten Vierecks.

d) Es sei $h : x \mapsto h(x), \quad x \in \mathbb{R}$, eine zweimal differenzierbare Funktion mit $h(x) > 0$ für alle $x > 0$ und $h(0) = 0$. (15P)

Man wählt für $u > 0$ den Punkt $P_u(u \mid h(u))$ auf dem Graphen der Funktion h. Der Punkt Q_u hat die Koordinaten $(u \mid 0)$, und man betrachtet das Dreieck OQ_uP_u, wobei O der Ursprung ist.

(1) Erstellen Sie eine geeignete Skizze.

(2) Begründen Sie, dass das Dreieck OQ_uP_u den Flächeninhalt $A(u) = \frac{1}{2}u \cdot h(u), \; u > 0$, besitzt.

(3) Zeigen Sie:

Wenn u_E eine Extremstelle der Funktion A mit der Gleichung $A(u) = \frac{1}{2}u \cdot h(u),\ u > 0$, ist, so gilt $h'(u_E) = -\frac{h(u_E)}{u_E}$.

Zeigen Sie weiter:

Gilt zusätzlich die Aussage $h'(u_E) + \frac{1}{2}u_E \cdot h''(u_E) < 0$ so ist $A(u_E)$ ein lokales Maximum der Funktion A.

(4) Es sei f die bei der Aufgabenstellung definierte Funktion mit der Gleichung

$f(x) = 3x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Im I. Quadranten spannen der Ursprung O und die Punkte $P(a \mid f(a))$ und $Q(a \mid 0)$ für $a > 0$ ein Dreieck auf.

Untersuchen Sie (z.B. mit Hilfe von d (3)), ob ein $a > 0$ existiert, für das das Dreieck OQP einen maximalen Flächeninhalt besitzt.