a) **► Breite und Höhe der Schachtel angeben** (18P)

Die Grundfläche der Schachtel ist quadratisch. Die Breite der Schachtel ist also gerade die Kantenlänge der Grundseite.

Eine Kante des Quadrates $ABCD$ ist beispielsweise die Kante $\overline{AB}$. Berechne die Länge dieser Strecke.

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 & - & 8 \\ 8 & - & 0 \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 8$$

Die Schachtel ist 8 cm breit.

Nun zur Höhe. Die Schnittebene E_{EGH}, die den Deckel bildet, verläuft nicht parallel zur Grundfläche, sondern schräg. Im Schaubild und auch anhand der Koordinaten der Punkte erkennst du, dass der Punkt H der höchste Punkt des Deckels ist. Die Höhe der Schachtel ist also genau der **Abstand des Punktes H von der Grundfläche**.

Anhand der Koordinaten von A, B, C und D kannst du sehen, dass das Quadrat $ABCD$ sich in der x_1,x_2-Ebene befindet. Sie lässt sich beschreiben durch die Gleichung $x_3 = 0$.

Der Abstand des Punktes H von der Grundfläche ist also genau der Abstand des Punktes H von der x_1,x_2-Ebene, also genau seine x_3-Koordinate $x_3 = 5$.

Die Schachtel ist 8 cm breit und an der höchsten Stelle 5 cm hoch.

► Parametergleichung der Ebene E_{EGH} bestimmen

Benutze zum Beispiel den Vektor $\overrightarrow{OE}$ als Stützvektor und de Vektoren $\overrightarrow{EG}$ und $\overrightarrow{EH}$ als Richtungsvektoren:

$$\begin{aligned} E_{\text{EGH}} &= \overrightarrow{OE} + r \cdot \overrightarrow{EG} + s \cdot \overrightarrow{EH} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 & - & 4 \\ 4 & - & 0 \\ 4 & - & 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 & - & 4 \\ 0 & - & 0 \\ 5 & - & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

► Koordinatengleichung der Ebene ermitteln

Die Koordinatengleichung einer Ebene hat immer die Form $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, wobei die Koeffizienten a, b und c genau die Koordinaten des Normalenvektors der Ebene sind.

Berechne den Normalenvektor der Ebene E_{EGH}.

►► Lösungsweg A: Normalenvektor über ein LGS berechnen

Der Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf **jeden der beiden** Richtungsvektoren.

Somit muss das Skalarprodukt von $\overrightarrow{n}$ mit jedem der beiden Richtungsvektoren Null ergeben:

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & -4n_1+4n_2=0 & \mid +4n_1 \\ \text{II} & -4n_1+n_3=0 & \mid +4n_1 \\ \hline \text{I} & 4n_2=4n_1 & \\ \text{II} & n_3=4n_1 & \end{array}$$

Aus I folgt $n_2 = n_1$. Der Normalenvektor hat bisher also die Koordinaten $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_1 \\ 4n_1 \end{pmatrix}$.

Wähle einen beliebigen Wert für n_1, z.B. $n_1 = 1$ und erhalte einen möglichen Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

▶▶ Lösungsweg B: Normalenvektor über das Kreuzprodukt

Der Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ kann auch über das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren berechnet werden:

$$\overrightarrow{n} = \begin{array}{cc} \hline -4 & -4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 0-(-4) \\ 0-(-16) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Setze die Koordinaten des Normalenvektors ein in die allgemeine Koordinatengleichung der Ebene und erhalte zunächst:

$E_{\text{EGH}} : x_1 + x_2 + 4x_3 = d$. Setze einen beliebigen Punkt, der in der Ebene liegt, ein, um d zu bestimmen. Wir benutzen den Punkt E.

$4 + 0 + 4 \cdot 4 = 4 + 16 = 20 = d$. Die Koordinatengleichung der Ebene lautet also $E_{\text{EGH}} : x_1 + x_2 + 4x_3 = 20$.

▶ Koordinaten von F bestimmen

In der Skizze siehst du, dass F der Schnittpunkt der Kante $\overline{SB}$ und der Ebene E_{EGH} ist. Bilde also zunächst die Gleichung einer Geraden, die durch die Punkte S und B verläuft.

$$(SB) : \overrightarrow{x} = \overline{OS} + t \cdot \overrightarrow{SB}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 & - & 0 \\ 8 & - & 0 \\ 0 & - & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Berechne nun den Schnittpunkt von Ebene und Gerade. Teile die Gleichung der Geraden (SB) hierzu zunächst auf in die einzelnen drei Zeilen:

$x_1 = 0 + 8t$

$x_2 = 0 + 8t$

$x_3 = 8 - 8t$

Setze diese drei Werte in die Koordinatengleichung von E_{EGH} ein:

$$\begin{aligned} 8t+8t+4\cdot(8-8t) &= 20 \\ 16t+32-32t &= 20 \qquad \mid -32 \\ -16t &= -12 \qquad \mid : (-16) \\ t &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Setze $t=\frac{3}{4}$ ein in die Gleichung von (SB) und erhalte somit den Schnittpunkt F:

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Punkt F hat die Koordinaten $F(6 \mid 6 \mid 2)$.

► Parallelität prüfen

Die Grundfläche der Schachtel ist die Ebene E_{ABCD}. Es fällt auf, dass alle vier Punkte A, B, C und D die x_3-Koordinate $x_3 = 0$ besitzen und somit alle in der x_1,x_2-Ebene liegen. Der Normalenvektor dieser Ebene ist $\overrightarrow{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zwei Ebenen verlaufen parallel, wenn ihre Normalenvektoren parallel verlaufen, d.h. linear abhängig sind. Du siehst auf den ersten Blick, dass die Vektoren $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig und damit **nicht** parallel sind.

Die Deckfläche und die Grundfläche der Schachtel verlaufen nicht parallel.

b) **► Orthogonalität nachweisen** (17P)

Die beiden Diagonalen liegen auf den Geraden (HF) und (EG). Stelle jeweils eine Geradengleichung auf:

$$\begin{aligned} (HF): \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OH} + r\cdot\overrightarrow{HF} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 6 & - & 0 \\ 6 & - & 0 \\ 2 & - & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \\ (EG): \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OE} + r\cdot\overrightarrow{EG} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 & - & 4 \\ 4 & - & 0 \\ 4 & - & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zwei Geraden verlaufen orthogonal zueinander, wenn ihre Richtungsvektoren orthogonal verlaufen, d.h. wenn deren Skalarprodukt Null ergibt:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot (-4) + 6 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 = -24 + 24 = 0$$

Damit ist die Orthogonalität der Geraden und damit auch der Diagonalen nachgewiesen.

▶ Länge der Diagonalen berechnen

Berechne die Beträge der Vektoren $\overrightarrow{HF}$ und $\overrightarrow{EG}$.

$$\left|\overrightarrow{HF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$\left|\overrightarrow{EG}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

▶ Schnittpunkt V berechnen

Setze die beiden Geradengleichungen gleich.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad | - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem.

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 6r & = & 4 - 4s \\ \text{II} & 6r & = & \quad + 4s \\ \text{III} & -3r & = & -1 \end{array}$$

Aus III folgt $r = \frac{1}{3}$. Setze dies ein in I:

$$\begin{aligned} 6 \cdot \frac{1}{3} &= 4s \\ 2 &= 4s \qquad |:4 \\ \tfrac{1}{2} &= s \end{aligned}$$

Setze $r = \frac{1}{3}$ und $s = \frac{1}{2}$ ein in I und erhalte:

$$\begin{aligned} 6 \cdot \frac{1}{3} &= 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} \\ 2 &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Dies ist eine wahre Aussage. Die beiden Geraden schneiden sich also in einem Punkt V. Setze z.B. $s = \frac{1}{2}$ ein in die Gleichung von (EG).

$$\overrightarrow{OV} = \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$$

Der Punkt V hat die Koordinaten $V(2 \mid 2 \mid 4)$.

► **Flächeninhalt der Deckfläche bestimmen**

Die Dachfläche ist ein **Rautenviereck**. Den Flächeninhalt eines solchen Vierecks berechnest du mit der Formel $A = \frac{1}{2}\cdot e\cdot f$, wobei e und f die beiden **Diagonalen** repräsentieren.
Die Länge der Diagonalen hast du eben berechnet. Setze deren Länge also ein in die Formel zur Flächenberechnung:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{HF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{EG}\right| = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot\sqrt{32} = 4{,}5\sqrt{32} \approx 25{,}46$$

Der Flächeninhalt der Deckfläche beträgt etwa 25,46 FE.

c) ► **Punkte in der Ebene nachweisen** (15P)

In der Ebene $E' : x_3 = 4$ liegen alle Punkte, deren x_3-Koordinate $x_3 = 4$ ist. Dies ist bei den Punkten E, G, F' und H' der Fall. Sie liegen also auf jeden Fall in der Ebene E'.

Es ist aber zu zeigen, dass diese vier Punkte die Deckfläche der Schachtel bilden, d.h. dass dies die vier Punkte sind, in denen die Ebene E' von den vier Pyramidenkanten durchstoßen wird.
Zeige also, dass jeder der vier Punkte auch noch auf einer der vier Kanten liegt.

Für E und G ist dies bereits erledigt, es fehlen noch die Punkte F' und H'.

1. Schritt: Zeige: F' liegt auf (SB)

Die Gleichung der Geraden durch die Punkte S und B wurde bereits im letzten Aufgabenteil verwendet:

$$(SB) : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}8\\8\\-8\end{pmatrix}$$

Setze die Koordinaten von F' ein:

$$\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}8\\8\\-8\end{pmatrix} \quad \Big| -\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix}8\\8\\-8\end{pmatrix}$$

Du siehst sofort, dass F' für $t = 2$ auf (SB) und damit auch auf der zugehörigen Pyramidenkante liegt.

2. Schritt: Zeige: H' liegt auf (SD)

Bestimme zunächst die Gleichung der Geraden durch die Punkte S und D.

$$(SD): \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \overrightarrow{SD}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & - & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & - & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Setze den Punkt H' ein:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad | - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

H' liegt also auf dieser Geraden für $t = \frac{3}{8}$.

Damit ist nachgewiesen, dass die Punkte E, G, F' und H' die neue Deckfläche bilden.

▶ Form nachweisen

Da die neue Schnittebene E' parallel zur Grundfläche verläuft, liegt die Vermutung nahe, dass es sich bei dem Viereck $EF'GH'$ um ein **Quadrat** handelt.

Ein Quadrat hat vier gleiche Seiten und vier rechte Innenwinkel. Weise zunächst die Gleichheit der Seitenlängen nach.

$$\left|\overrightarrow{EF'}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 & - & 4 \\ 4 & - & 0 \\ 4 & - & 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 4$$

$$\left|\overrightarrow{F'G}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 & - & 4 \\ 4 & - & 4 \\ 4 & - & 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 4$$

$$\left|\overrightarrow{GH'}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 & - & 0 \\ 0 & - & 4 \\ 4 & - & 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 4$$

$$\left|\overrightarrow{H'E}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 & - & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 4 & - & 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 4$$

Damit ist die Gleichheit der Seitenlängen nachgewiesen. Es genügt nun, wenn du einen rechten Winkel nachweist, daraus folgt dann, dass auch die übrigen drei Winkel rechtwinklig sein müssen. Wähle z.B. den Winkel zwischen den Seiten $\overline{EH'}$ und $\overline{EF'}$. Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.

$$\overrightarrow{EH'} \circ \overrightarrow{EF'} = \begin{pmatrix} 0 & - & 4 \\ 0 & - & 0 \\ 4 & - & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = (-4) \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 0$$

Damit ist nachgewiesen, dass das Viereck $EF'GH'$ ein Quadrat ist.

► Deckfläche beurteilen

Betrachten wir die Pyramide $ABCDS$. Sie besitzt eine quadratische Grundfläche, die in der x_1,x_2-Ebene liegt.

Eine quadratische Deckfläche kann diese Schachtel nun nur dann bekommen, wenn die zugehörige Schnittebene parallel zur Grundfläche verläuft. Denn dann befinden sich alle vier Schnittpunkte in einer Parallelen zur Grundfläche. Wird diese Ebene „schief“ gewählt, so erhältst du beispielsweise eine Deckfläche wie in der Aufgabenstellung am Anfang.