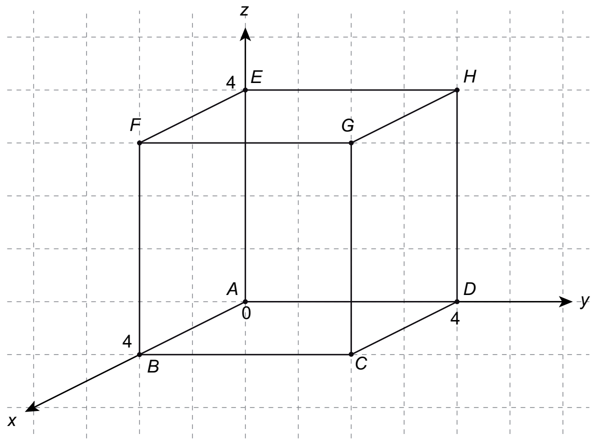
a) **► Koordinaten der Eckpunkte C und D angeben** (11P)

Du sollst die Koordinaten der Eckpunkte C und D angeben. Auf der Abbildung kannst du erkennen, wo diese liegen sollen. Du kannst sehen, dass der Punkt $A(0 \mid 0 \mid 0)$ im Ursprung des Koordinatensystems liegt, und $B(4 \mid 0 \mid 0)$ durch Verschiebung des Punktes A um 4 Einheiten entlang der positiven x-Achse entsteht. Demnach sind die Kanten des Würfels 4 LE lang.



Die Koordinaten des Punktes C erhältst du nun, indem du den Punkt $B(4 \mid 0 \mid 0)$ um 4 Einheiten entlang der positiven y-Achse verschiebst. Dazu musst du nur die y-Koordinate um 4 erhöhen. Damit ergibt sich dann:

$C(4 \mid 4 \mid 0)$.

Die Koordinaten des Punktes D erhältst du nun auf ähnliche Weise, indem du den Punkt A um 4 Einheiten entlang der positiven y-Achse verschiebst: $D(0 \mid 4 \mid 0)$.

Die Koordinaten der Eckpunkte C und D lauten: $C(4 \mid 4 \mid 0)$ und $D(0 \mid 4 \mid 0)$.

► Korrektheit der Geradengleichung zeigen

Du sollst nun zeigen, dass die Gerade g durch die Punkte A und H durch

$g_1 : \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

Eine Geradengleichung hat im Allgemeinen folgende Form:

$g : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + t \cdot \overrightarrow{r}$, wobei:

- $\overrightarrow{p}$ der Stützvektor, der Ortsvektor des Aufpunktes ist. Der Aufpunkt ist ein beliebiger Punkt auf der Geraden und gibt die Lage der Geraden im Raum an.
- $\overrightarrow{r}$ der Richtungsvektor ist. Dieser gibt die Richtung der Geraden an und ist ein Vielfaches der Differenz der Ortsvektoren zweier Punkte auf der Geraden.

Gehe nun wie folgt vor:

1. Aufstellen einer Geradengleichung der Gerade g durch die Punkte A und H.
2. Überprüfen, ob diese mit g_1 übereinstimmt.

Ein möglicher Richtungsvektor $\overrightarrow{r}$ der Geraden g durch die Punkte A und H ergibt sich also durch:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ein möglicher Aufpunkt für die Gerade g ist A.

Damit ergibt sich für g beispielsweise:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}.$$

Anhand der Geradengleichung der Geraden g, die sicher durch die Punkte A und H verläuft, kannst du nun sehen, dass der Richtungsvektor von g ein Vielfaches des Richtungsvektors von g_1 ist:

$$\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet, dass die Richtungsvektoren parallel sind. Zudem haben beide den Aufpunkt $A(0 \mid 0 \mid 0)$. Demnach haben beide Geraden dieselbe Lage im Raum. Die Geradengleichung der Geraden g_1 ist also eine mögliche Darstellungsweise der Geraden durch die Punkte A und H.

► Zeigen, dass die Gerade g_2 durch den Mittelpunkt der Seite $\overline{FG}$ verläuft

Du sollst nun zeigen, dass die Gerade g_2 durch den Mittelpunkt der Seite $\overline{FG}$ verläuft. Die Gerade g_2 ist gegeben durch $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Du kannst nun wie folgt vorgehen:

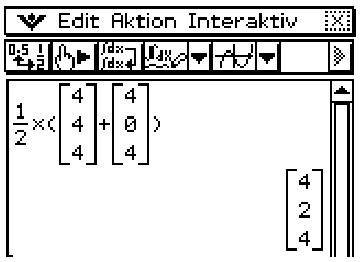
1. Berechne die Koordinaten des Mittelpunkts M_{FG} der Strecke $\overline{FG}$ mit Hilfe der Mittelpunktsformel.
2. Überprüfe mittels einer Punktprobe, ob M_{FG} auf der Geraden g_2 liegt.

1. Schritt: Koordinaten des Mittelpunkts M_{FG} berechnen

Die Formel zur Berechnung des Mittelpunkts M einer Strecke $\overline{AB}$ lautet:
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})$

Du kannst nun also die Ortsvektoren der Punkte F und G in diese Formel einsetzen und das Ergebnis mit dem CAS berechnen. Den Befehl für einen Vektor findest du unter `Keyboard → 2D → CALC → (()())`. Weitere Zeilen zufügen kannst du durch mehrmaliges Klicken.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_{FG}} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OF}\right)\\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}\right) \qquad \text{CAS}\\ &= \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}\end{aligned}$$



Damit lauten die Koordinaten des Mittelpunkts M_{FG} der Strecke $\overline{FG}$: $\quad M_{FG}(4 \mid 2 \mid 4)$.

2. Schritt: Punktprobe durchführen

Um nun zu überprüfen, ob der Punkt M_{FG} auf der Geraden g_2 liegt, führe eine Punktprobe durch, indem du $\overrightarrow{OM_{FG}}$ für $\overrightarrow{x}$ in die Geradengleichung von g_2 einsetzt. Die Gleichung kannst du dann mit dem CAS lösen. Gibt es keine Lösung für s, die diese Gleichung erfüllt, so verläuft die Gerade g_2 nicht durch den Punkt M_{FG}.

Du erhältst die Gleichung:

$$\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \qquad \Big|\; - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Du kannst diese Gleichung nun mit Hilfe eines **linearen Gleichungssystems** lösen. Das LGS erhältst du, indem du aus der obigen Gleichung jede „Zeile“ einzeln abliest.

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2 &=& 1s \\ \text{II} & 2 &=& 1s \\ \text{III} & 4 &=& 2s \end{array}$$

Dann erhältst du aus den ersten beiden Gleichung folgendes Ergebnis:

$s = 2$.

Setzt du dies in III ein, so erhältst du:

$$\begin{array}{ll} 4 = 2s & \mid\; s = 2 \\ 4 = 2\cdot 2 & \mid \\ 4 = 4 & \mid \end{array}$$

$s = 2$ erfüllt also alle drei Gleichungen des linearen Gleichungssystems.

Mit einer Punktprobe zeigt sich, dass der Punkt

$M_{FG}(4 \mid 2 \mid 4)$ auf der Geraden g_2 liegt.

► Lagebeziehung untersuchen

Du sollst die Lagebeziehung zwischen den Geraden g_1 und g_2 untersuchen. Die Geraden g_1 und g_2 sind dir aus den vorigen Aufgabenteilen gegeben mit:

- $g_1 : \vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$
- $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Zwei Geraden g und h können folgende Lagebeziehungen aufweisen:

- **windschief**: Die Geraden sind weder parallel zueinander noch schneiden sie sich.
- **identisch**: Die beiden Geraden sind parallel und besitzen gemeinsame Punkte.
- **parallel**aber, **nicht identisch**: Die beiden Geraden verlaufen in die selbe Richtung. Der Richtungsvektor von h ist ein Vielfaches des Richtungsvektors von g: $\overrightarrow{r_h} = a \cdot \overrightarrow{r_g}$. Die beiden Geraden besitzen keine gemeinsamen Punkte.
- **sie schneiden sich**: Die Geraden sind nicht parallel, haben aber einen gemeinsamen Punkt.

Prüfe die Geraden g_1 und g_2 zunächst auf Parallelität und anschließend auf gemeinsame Punkte.

1. Schritt: Parallelität prüfen

Überprüfe zuerst, ob der Richtungsvektor der Geraden g_1 ein Vielfaches des Richtungsvektors von g_2 ist. Die Richtungsvektoren sind dir gegeben mit:

$$\overrightarrow{r_{g_1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{r_{g_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Du kannst sehen, dass es kein a gibt, für das $\overrightarrow{r_{g_1}} = a \cdot \overrightarrow{r_{g_2}}$ gilt. Die Geraden g_1 und g_2 verlaufen also nicht parallel und sind damit auch nicht identisch.

2. Schritt: Auf gemeinsame Punkte prüfen

Überprüfe nun noch, ob die beiden Geraden g_1 und g_2 windschief zueinander liegen oder sich in einem Punkt schneiden. Setze dazu die beiden Geradengleichungen gleich und überprüfe, ob diese Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt. Ist das der Fall, so besitzen die beiden Geraden einen Schnittpunkt. Ist das nicht der Fall, so besitzen sie keinen gemeinsamen Punkt und sind windschief zueinander.

Durch Gleichsetzen erhältst du folgende Gleichung:

$$t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

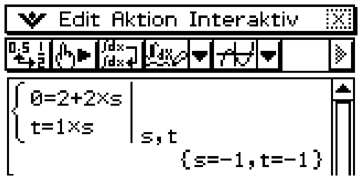
Diese Gleichung kannst du nun in deinem CAS lösen. Bilde dazu das lineare Gleichungssystem, das sich aus der obigen Gleichung ergibt:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 0 & = & 2 + 2s \\ \text{II} & 1t & = & 0 + 2s \\ \text{III} & 1t & = & 0 + 4s \end{array}$$

Löse nun zuerst das LGS, das sich aus I und II ergibt und überprüfe die Lösung anschließend durch einsetzen in III.

Den Befehl für ein LGS findest du unter $\boxed{\texttt{Keyboard} \rightarrow \texttt{2D} \rightarrow \{^{()}_{()}}$.

Gibst du anschließend die beiden Gleichungen und auch die Unbekannten s und t ein und bestätigst mit `EXE`, so erhältst du das Ergebnis:
$s = -1$ und $t = -1$.



Setze nun beides in III ein:

$$t = 0 + 4 \cdot s$$
$$-1 = 4 \cdot (-1)$$
$$-1 = -4 \qquad \text{Widerspruch}$$

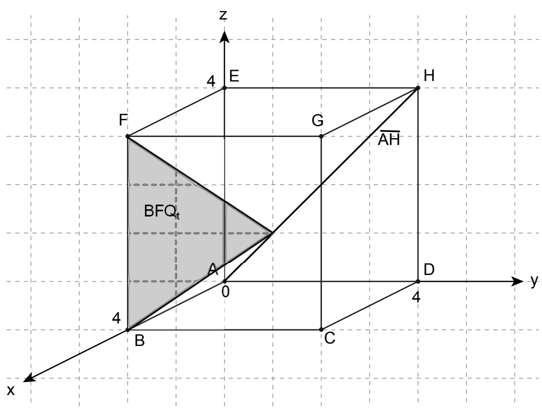
Dies bedeutet nun, dass die Gleichung keine Lösung besitzt und die beiden Geraden g_1 und g_2 somit keine gemeinsamen Punkte besitzen.

Die Geraden g_1 und g_2 verlaufen nicht parallel und besitzen keine gemeinsamen Punkte. Sie sind also windschief.

b) ▶ **Zeigen, dass das Dreieck gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist** (11P)

Durch die drei Punkte B, F und Q_t ist immer ein Dreieck gegeben. Du sollst zeigen, dass das Dreieck BFQ_t für $t = 2$ gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist. Dabei beschreibt für $0 \leq t \leq 4$ die Gleichung von g_1 alle Punkte Q_t auf der Strecke $\overline{AH}$.

Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn zwei der drei Seiten die selbe Länge besitzen. Besitzen alle drei Seiten des Dreiecks die gleiche Länge, so ist das Dreieck gleichseitig.



In diesem Fall wird das Dreieck von Vektoren gebildet. Die Länge eines Vektors entspricht seinem Betrag, den du mit dem `norm`-Befehl des CAS berechnen kannst.

Um zu überprüfen, ob ein gleichschenkliges bzw, gleichseitiges Dreieck vorliegt, kannst du wie folgt vorgehen:

1. Bestimme die Kantenvektoren des Dreiecks BFQ_2.
2. Berechne die Länge der Seiten über den Betrag der Kantenvektoren.

1. Schritt: Vektoren berechnen

Das Dreieck BFQ_2 wird von den drei Vektoren $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{FQ_2}$ und $\overrightarrow{Q_2B}$ aufgespannt. Berechne zuerst den Ortsvektor des Punktes Q_2, indem du $t = 2$ in die Geradengleichung von g_1 einsetzt:

$$\overrightarrow{OQ_2} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Seitenvektoren ergeben sich dann mit:

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FQ_2} = \overrightarrow{OQ_2} - \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{Q_2B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OQ_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

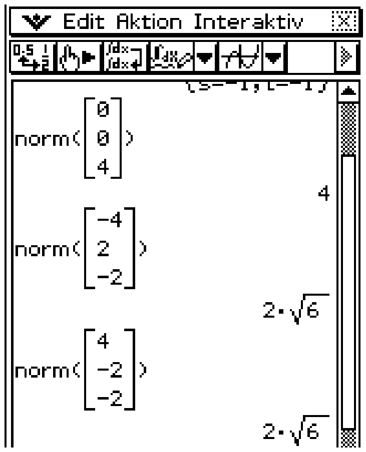
2. Schritt: Seitenlängen berechnen

Nun kannst du mit Hilfe des `norm`-Befehls die Längen der Seiten berechnen:

$\left|\overrightarrow{BF}\right| = 4$

$\left|\overrightarrow{FQ_2}\right| = 2 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{24}$

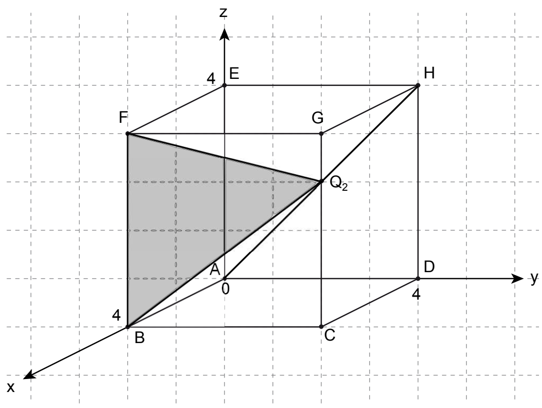
$\left|\overrightarrow{Q_2B}\right| = 2 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{24}$



Die Seiten $\overline{FQ_2}$ und $\overline{Q_2B}$ des Dreiecks BFQ_2 haben die Länge $\sqrt{24}$, während die Seite $\overline{BF}$ die Länge 4 besitzt. Demnach hat das Dreieck BFQ_2 genau zwei Seiten gleicher Länge, ist also gleichschenklig aber nicht gleichseitig.

▶ Dreieck und Höhe in das Koordinatensystem einzeichnen

Du sollst das Dreieck BFQ_2 in das Koordinatensystem einzeichnen. Trage dazu zunächst den Punkt $Q_2(0 \mid 2 \mid 2)$ ein. Die Punkte B und F sind bereits eingetragen.
Verbinde anschließend die Punkte miteinander. Färbst du die Fläche des Dreiecks zusätzlich ein, sollte dein Koordinatensystem ähnlich wie hier aussehen.

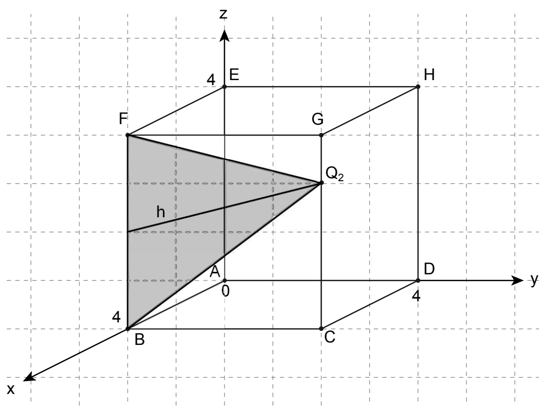


▶ Höhe in das Koordinatensystem einzeichnen

Du sollst die Höhe h zur Seite $\overline{BF}$ des Dreiecks BFQ_2 in das Koordinatensystem einzeichnen.

Die Höhe zu einer Seite $\overline{AB}$ eines Dreiecks ABC ist das Lot, das die Seite $\overline{AB}$ mit dem gegenüberliegenden Punkt C verbindet. Sie steht also senkrecht auf der Seite $\overline{AB}$.

Die Höhe h zur Seite $\overline{BF}$ in dem Dreieck BFQ_2 steht also senkrecht auf der Dreiecksseite $\overline{BF}$ und verbindet diese Seite mit dem gegenüberliegenden Punkt Q_2. Du weißt, dass die Seiten $\overline{FQ_2}$ und $\overline{Q_2B}$ die gleiche Länge besitzen. Damit ist das Dreieck achsensymmetrisch zur Höhe h. Demnach ist h genau die Strecke zwischen dem Mittelpunkt von $\overline{BF}$ und dem Punkt Q_2. Da die Seite $\overline{BF}$ eine Kante des Würfels ist, kannst du den Mittelpunkt geometrisch ermitteln.



Zeichnest du die Höhe nun in das Koordinatensystem ein, sollte es wie hier aussehen.

► Begründen, dass die Dreiecke nicht alle in derselben Ebene liegen.

Du sollst begründen, dass die Dreiecke BFQ_t für verschiedene Werte von t nicht alle in derselben Ebene liegen. Berechne dazu für zwei verschiedene Werte von t die Koordinaten des Punkts Q_t und betrachte anschließend die Lage der jeweiligen Dreiecke.

Wähle beispielsweise $t_1 = 0$ und $t_2 = 1$. Dann ergibt sich:

$$\overrightarrow{OQ_0} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ_1} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $t = 0$ liegt Q_0 im Ursprung. Damit liegen alle drei Eckpunkte und somit das gesamte Dreieck BFQ_0 in diesem Fall in der xz-Ebene.

Für $t = 1$ liegt Q_1 allerdings nicht in der xz-Ebene und damit liegt auch das Dreieck BFQ_1 in diesem Fall nicht in der xz-Ebene. Demnach liegen für verschiedene Werte von t nicht alle Dreiecke in derselben Ebene.