Für jede reelle Zahl t mit $t \neq 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch
$y = f_t(x) = \dfrac{1}{t} \cdot (t^2 x - x^3) \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Untersuchen Sie für $t = 3$ den Graphen der Funktion f_t auf Symmetrie. (7BE)

Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und der Wendepunkte des Graphen von f_3.

Der Graph von f_3 soll so im Koordinatensystem verschoben werden, dass ein Extrempunkt auf der x-Achse, ein Extrempunkt auf der y-Achse und der Wendepunkt im IV. Quadranten liegen.

Geben Sie eine Gleichung an, die diesen Graph beschreibt.

b) Jeder Graph der Funktion f_t begrenzt mit der x-Achse zwei Flächen vollständig. (6BE)

Berechnen Sie einen Wert für t so, dass der Gesamtinhalt dieser Flächen 864 FE beträgt.

Ermitteln Sie die Anzahl der Extremstellen von f_t in Abhängigkeit von t.

Durch einen Eingabefehler wird die Funktionsgleichung zu
$y = g_t(x) = \dfrac{1}{t} \cdot (t^3 x - x^3)$ verändert.
Geben Sie an, wie sich diese Änderung auf die Anzahl der Extremstellen von f_t auswirkt.

c) Der Graph von f_3 soll im Intervall $0 \leq x \leq 3$ durch den Graphen einer quadratischen Funktion angenähert werden. (4BE)

Beschreiben Sie Ihren Ansatz und geben Sie eine Gleichung einer solchen Funktion an.

Begründen Sie, dass im Intervall $0 \leq x \leq 3$ keine Parabel existiert, die den Graphen von f_3 exakt beschreibt.

d) Der Koordinatenursprung O, der Punkt $R(3 \mid 0)$ und ein Punkt $Q(q \mid f_3(q))$ mit $0 < q < 3$ bilden ein Dreieck ORQ. (4BE)

Untersuchen Sie, ob die Seiten $\overline{OR}$, $\overline{QR}$ bzw. $\overline{OQ}$ jeweils Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ORQ sein können.

Bestimmen Sie gegebenenfalls für jede Möglichkeit näherungsweise die Stellen q.

e) Auf dem Graphen von f_3 liegt für $0 < p < 3$ ein Punkt $P(p \mid f_3(p))$. Die Punkte P, $S(p \mid 0)$ und $R(3 \mid 0)$ bilden ein Dreieck. (4BE)

Berechnen Sie p so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks PSR maximal wird.

Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

f) Durch die Gleichung $y = mx + n \quad (x \in \mathbb{R};\ m,\ n \in \mathbb{R})$ werden alle Tangenten an den Graphen von f_3 beschrieben. (5BE)
Für $m = -1$ existieren zwei Tangenten an den Graphen von f_3.

Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Tangenten.

Berechnen Sie den Abstand der beiden Tangenten.

Ermitteln Sie die Anzahl der Tangenten an den Graphen von f_3 in Abhängigkeit vom Anstieg m.

(30BE)

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.