a) ► **Wahrscheinlichkeiten bestimmen** (7P)

Die Aufgabe gibt dir vor, dass die beiden Zufallsgeräte je einmal geworfen werden sollen. Du sollst dann die jeweilige Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit der A_1, A_2 oder A_3 eintreten.

Für den Quader Q hast du vorgegeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Ergebnis eintritt. Der Würfel W wird als Laplace-Würfel beschrieben. Ein Laplace-Würfel hat die Eigenschaften eines idealen Würfels. Das bedeutet, dass jedes der Ereignisse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintritt.

Jedes der Zufallsgeräte hat sechs Seiten, die mit den Augenzahlen 1, 3 und 5 belegt sind. Gegenüberliegende Seiten sollen die gleiche Augenzahl zeigen. Also gibt es zwei Seiten, die die 1 zeigen, zwei, die die 3 zeigen und wiederum zwei, die die 5 zeigen.

Somit kannst du die Wahrscheinlichkeit, dass beim Würfel W eine bestimmte Zahl gezeigt wird, so beschreiben:

$$P_W(1) = P_W(3) = P_W(5) = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Bestimme nun über die relativen Häufigkeiten die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

► **Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_1 bestimmen**

Die Aufgabenstellung gibt dir vor, dass die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht ist, mit der der Würfel W nicht den Wert 5 annimmt. Es ist also gesucht

$$P(W \text{ nicht } 5)$$

Wenn 5 nicht eintreten soll, heißt das im Umkehrschluss, dass nur 1 und 3 die gezeigte Augenzahl sein soll. Berechne die beiden Wahrscheinlichkeiten nach der Pfadregel und addiere sie dann.

► **Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_2 bestimmen**

Die Ausgangslage ist wieder dieselbe wie bereits für das vorangehende Ereignis.

Lies die Wahrscheinlichkeiten, dafür dass eine 1 oder eine 3 fällt, aus der gegebenen Tabelle ab.

Somit kannst du die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_2 nach der Pfadregel berechnen.

► **Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_3 bestimmen**

Nun sollst du die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass die Augenzahlen der Würfel als Summe genau Sechs ergeben.

Überlege dir zunächst, welche Ereignisse eintreten können und bestimme dann die Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Würfe eintreten, kannst du dann über ein Baumdiagramm betrachten. Es wird zuerst Q und dann W geworfen.

Suche nun alle Pfade im Baumdiagramm, die als Summe der Würfe eine Sechs ergeben. Es ergeben sich genau 3 Pfade, für die dieser Fall eintritt. Berechne nun die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade nach der Pfadregel.

b) ► **Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B_1 bestimmen** (5P)

Die Aufgabe gibt dir vor, dass das Zufallsgerät Q genau 10-mal geworfen werden soll. Du sollst nun die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass die Augenzahl 3 genau dreimal auftritt.

Sei X die Zufallsgröße, die die Anzahl k der Treffer der Augenzahl 3 beschreibt. X kann hier als binomialverteilt angenommen werden, da es sich bei dem vorgegebenen Experiment um eine Bernoulli-Kette handelt. Überlege dir, welche Werte n und p annehmen müssen.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 3 Mal die 3 auftritt; also die Wahrscheinlichkeit $P(X = 3)$.

▶ Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B_2 bestimmen

Nun soll die Augenzahl 3 bei gleicher Anzahl an Würfen des Zufallsgeräts Q mindestens 3 mal geworfen werden. Folglich suchst du nun die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 3)$.

c) **▶ Anzahl n berechnen** (4P)

Betrachte die Situation genau: Das Zufallsgerät Q wird geworfen und zwar n Mal. Betrachtet wird das Ereignis, dass die Zahl drei **genau einmal** auftritt. Sei Y die Zufallsgröße, welche die Anzahl der geworfenen Dreien in diesem Versuch beschreibt. Y kann mit der gleichen Begründung wie X oben als binomialverteilt angenommen werden.

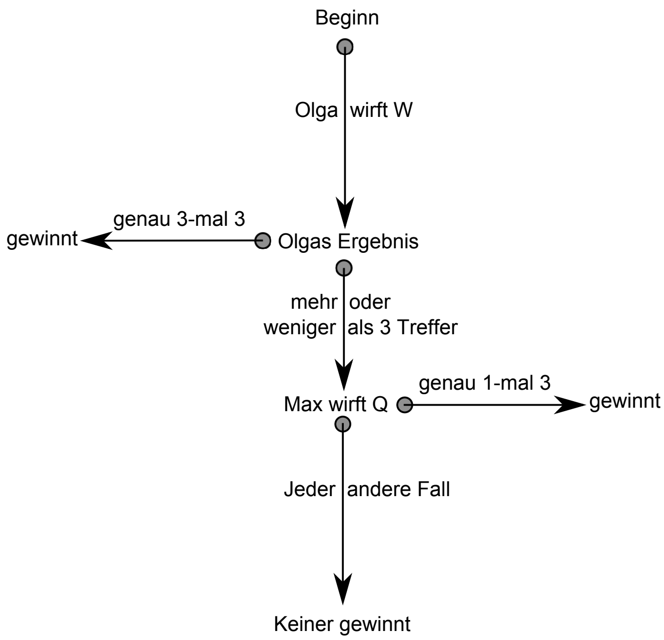
Die Parameter für die Binomialverteilung sind dann $p = 0,18$ und n unbekannt, da die Anzahl der Würfe ja variabel ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Drei genau einmal auftritt, ist die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 1)$. Diese Wahrscheinlichkeit soll nun **maximal** werden.

Du kannst so vorgehen:

- Berechne in deinem CAS die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 1)$ für verschiedene Werte von n.
- Beobachte, ob sich ein Muster erkennen lässt.

d) **▶ Gewinnchancen in Olgas und Max' Spiel** (6P)

Zunächst solltest du dir klar machen, in welcher Reihenfolge das Spiel funktioniert. Dies soll durch die folgende Skizze dargestellt werden. Beachte dabei, dass sowohl Olga als auch Max den Würfel bzw. den Quader je 10 Mal werfen.



Du kannst also erkennen, dass zunächst Olga verlieren muss, damit Max überhaupt eine Chance auf den Sieg hat. Dabei ist die Aussage, dass Olga verliert äquivalent dazu, dass sie mehr oder weniger als drei Treffer erzielt.

Bestimme also zunächst Olgas Chancen zu gewinnen. Die Gegenwahrscheinlichkeit dazu ist dann gerade die Wahrscheinlichkeit, dass Max überhaupt werfen darf. Dann kannst du die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass Max gewinnt.

1. Schritt: Olgas Gewinnchance bestimmen

Damit Olga gewinnt muss sie das Zufallsgerät W werfen und genau dreimal die Augenzahl 3 erzielen. Sei X die Anzahl der dreien unter Olgas Würfen. Die Zufallsgröße ist wieder binomialverteilt. Überlege, wie n und p lauten müssen und berechne dann $P(X = 3)$. Max darf werfen, wenn Olga **nicht** gewinnt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Max werfen darf ist also die Wahrscheinlichkeit des **Gegenereignisses** zu „Olga gewinnt“ bzw. zu „X_W ist genau 3“.

2. Schritt: Wahrscheinlichkeit, dass Max gewinnt, berechnen

Max muss nun, wenn Olga verloren hat, genau einmal die Augenzahl 3 mit dem Zufallsgerät Q werfen, um zu gewinnen.

Max gewinnt also, wenn Olga verliert **und** er genau einmal die 3 wirft. Berechne diese Wahrscheinlichkeit und vergleiche mit der Gewinnwahrscheinlichkeit von Olga.

d) ► **Begründet entscheiden, welche Wahrscheinlichkeit dargestellt wird** (8P)

Du hast in diesem Fall ein Diagramm gegeben, von dem du auf das verwendete Zufallsgerät schließen sollst. Du kannst zunächst einmal erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl 3 genau zweimal geworfen wird, größer ist, als dass die Augenzahl 3 genau dreimal geworfen wird.

Folglich kannst du herausfinden, welches Zufallsgerät verwendet wurde, indem du diese Wahrscheinlichkeiten bestimmst. Sei dazu X die Zufallsvariable, die die Anzahl der geworfenen Dreien angibt.

Folglich benötigst du die Wahrscheinlichkeiten für $X = 3$ und $X = 2$ für $n = 10$ Würfe. Da es sich um dieselbe Ausgangssituation handelt wie bereits zuvor, kannst du X auch weiterhin als binomialverteilt betrachten.

Berechne also für die Zufallsgeräte W und Q die Wahrscheinlichkeiten $P(X_W = 2)$, $P(X_W = 3)$, $P(X_Q = 2)$ und $P(X_Q = 3)$.

Für das Zufallsgerät W gilt, dass alle Augenzahlen mit der relativen Häufigkeit $p_w = \dfrac{1}{3}$ geworfen werden.

Die relative Häufigkeit, dass die Augenzahl 3 mit dem Zufallsgerät Q geworfen wird, kannst du der Tabelle entnehmen mit $p_q = 18\% \mathrel{\widehat{=}} 0,18$.

► **Maßstab der Zeichnung bestimmen**

Den Maßstab einer Zeichnung erhältst du, indem du die Länge der Balken l mit dem dargestellten Prozentsatz P vergleichst. Dazu musst du das Verhältnis herausfinden, wieviel Prozent durch einen Zentimeter Balkenlänge dargestellt werden. Folglich erhältst du den Maßstab x, indem du die Wahrscheinlichkeit P durch die Balkenlänge l teilst.

Daraus ergibt sich:

$x = \dfrac{P}{l}$, wobei x die dargestellte Wahrscheinlichkeit pro Zentimeter ist.

Du benötigst also zunächst die Länge eines Balkens, die du durch Abmessen erhältst.

► **Diagramm ergänzen**

Da du nun den Maßstab bestimmt hast, kannst du das Diagramm ergänzen, indem du die fehlenden Wahrscheinlichkeiten berechnest und diese dann überträgst. Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 1)$ und $P(X = 4)$, wobei du X auch weiterhin als binomialverteilt betrachten kannst.