Die Abhängigkeit der Wachstumsgeschwindigkeit bestimmter Bakterien von der Salzkonzentration der Nährlösung lässt sich in einem vereinfachten Modell beschreiben durch Funktionen der Schar f_k mit $f_k(x) = \dfrac{x \cdot (6-x)}{(6-2k)\cdot x + k^2}$ für $0 < k < 6$ und $0 \leq x \leq 6$.

Dabei gibt x die Salzkonzentration der Nährlösung in Prozent an.

a) Skizzieren Sie für $k = 2$ und $k = 4$ die Graphen zu den Funktionen f_2 und f_4 in ein Koordinatensystem. (17P)

Bestimmen Sie für $0 \leq x \leq 6$ und $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ die Hochpunkte der Graphen zu den Funktionen f_k und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

Zeigen Sie, dass für $-3 \leq z \leq 3$ gilt: $f_2(3+z) = f_4(3-z)$, und erläutern Sie die geometrische Bedeutung dieser Aussage.

b) In dieser Teilaufgabe werden Bakterien betrachtet, deren Wachstumsgeschwindigkeit sich durch die Funktion f_4 beschreiben lässt. (17P)

Bestimmen Sie zwei Werte g_u und g_o für die Salzkonzentration, so dass gilt:

- die Wachstumsgeschwindigkeit beträgt für jede Konzentration im Intervall $[g_u; g_o]$ mindestens 90 % der maximalen Wachstumsgeschwindigkeit und
- das Intervall $[gu; go]$ ist so groß wie möglich.

(Zur Kontrolle: $g_u = 3$; $g_o = 4{,}8$)

Die Salzkonzentration schwankt aus verschiedenen Gründen während des Wachstumsprozesses. Es soll ein geeigneter Richtwert für die Salzkonzentration so festgelegt werden, dass die Wachstumsgeschwindigkeiten trotz der Schwankungen um diesen Richtwert möglichst groß sind.
Dazu werden drei Verfahren vorgeschlagen:

Verfahren 1	Der Richtwert ist m_1, das arithmetische Mittel von g_u und g_o.
Verfahren 2	Der Richtwert ist m_2, wobei m_2 die Stelle angibt, an der das Maximum vorliegt.
Verfahren 3	Der Richtwert ist m_3, wobei die Gerade zu $x = m_3$ die Fläche, die von der Geraden zu $y = 0{,}9$ und dem Graphen zu f_4 eingeschlossen wird, halbiert.

Bestimmen Sie die Werte m_1, m_2 und einen Näherungswert für m_3. (Zur Kontrolle: $m_3 \approx 3{,}95$)
Vergleichen Sie die drei Werte unter Bezug auf den Sachzusammenhang.

c) Gegeben ist die Taylorfunktion t_2 zweiten Grades an der Stelle 4 durch $t_2(x) = 1 - \dfrac{(x-4)^2}{8}$. (14P)
Sie können im Folgenden ohne Nachweis verwenden, dass gilt:
$f_4'(x) = \dfrac{x^2 - 16x + 48}{2\cdot (x-8)^2}$, $f_4''(x) = \dfrac{16}{(x-8)^3}$, $f_4'''(x) = -\dfrac{48}{(x-8)^4}$.
Begründen Sie, dass t_2 die Taylorfunktion zweiten Grades zu f_4 an der Stelle 4 ist.

Ermitteln Sie ausgehend von der Taylorfunktion t_2 die Taylorfunktion t_3 dritten Grades zu der Funktion f_4 an der Stelle 4.

Kontrollergebnis: $t_3(x) = -\dfrac{(x-4)^3}{32} - \dfrac{(x-4)^2}{8} + 1$.

Gegeben ist für $k = 2$ die Taylorfunktion s_3 dritten Grades zu der Funktion f_2 an der Stelle 2 durch $s_3(x) = \dfrac{(x-2)^3}{32} - \dfrac{(x-2)^2}{8} + 1$.
Vergleichen Sie die Graphen dieser beiden Taylorfunktionen s_3 und t_3; begründen Sie die festgestellten Gemeinsamkeiten und Unterschiede auf der Grundlage der Eigenschaften der Ausgangsfunktionen f_2 und f_4.

d) Unabhängig vom Anwendungsbezug wird in dieser Teilaufgabe die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = \dfrac{x \cdot (6-x)}{(6-2k) \cdot x + k^2}$, $k \in \mathbb{R}$, und jeweils maximaler Definitionsmenge D_k betrachtet. (12P)
Bestimmen Sie die maximalen Definitionsmengen D_k.

Sie können im Folgenden ohne Nachweis verwenden:
$f_k'(x) = \dfrac{2 \cdot (x-k) \cdot ((k-3) \cdot x - 3k)}{((6-2k) \cdot x + k^2)^2}$, $\quad f_k''(x) = -\dfrac{2 \cdot k^2 (k^2 - 12k + 36)}{((6-2k) \cdot x + k^2)^3}$.
Untersuchen Sie, für welche Scharparameter k die Funktionen f_k keine zwei Extremstellen besitzen.

(60P)