Minimaler Abstand Punkt-Kurve

Spickzettel Aufgaben Lösungen PLUS Lernvideos

Einführung

Um den minimalen Abstand zwischen einem Punkt $P(x_p, y_p)$ und einer Kurve $f(x)$ zu bestimmen, muss die Abstandsfunktion minimiert werden.

Gehe folgendermaßen vor:

- Stelle die **Abstandsfunktion**
  $d(u)=\sqrt{(u-x_p)^2+(f(u)-y_p)^2}$
  auf. Diese gibt den Abstand zwischen dem Punkt P und jedem beliebigen Punkt auf der Kurve an.

- Bestimme die **Minimalstelle** der Abstandsfunktion mit Hilfe der ersten Ableitung und überprüfe anschließend mit der zweiten Ableitung ob es sich tatsächlich um ein Minimum handelt.

- Den minimalen Abstand erhältst du durch einsetzen der Minimalstelle in die Abstandsfunktion.

Beispiel mit Lösungsskizze

Bestimme den minimalen Abstand des Punktes $P(1 \mid 3,5)$ zum Schaubild der Funktion $f(x) = -x^2 + 4$.

- **Abstandsfunktion**:

$$\begin{aligned} d(u) &= \sqrt{(u-x_p)^2+(f(u)-y_p)^2} \\ &= \sqrt{(u-1)^2+(-u^2+4-3,5)^2} \\ &= \sqrt{(u-1)^2+(-u^2+0,5)^2} \\ &= \sqrt{u^4-2u+1,25} \end{aligned}$$

- **Minimalstelle** der Abstandsfunktion:

$d(u)=\sqrt{u^4-2u+1,25}$

$d'(u) = (2u^3-1)(u^4-2u+1,25)^{-0,5}$

$d''(u)=\dfrac{4(4u^6-16u^3+15u^2-2)}{(4u^4-8u+5)^{1,5}}$

$$\begin{aligned} d'(u) &= 0 \\ 0 &= (2u^3-1)(u^4-2u+1,25)^{-0,5} \\ u &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

$d''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\approx 15,5 > 0$ somit handelt es sich um ein Minimum.

- $d\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=0,24$