a) **► Koordinatengleichung von E angeben** (7P)

Die Koordinatengleichung baut sich allgemein in der Form

$E: n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = p$

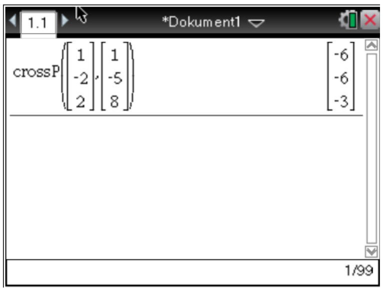
auf. Dabei bezeichnen n_1, n_2 und n_3 die Einträge des Normalenvektors. Du benötigst folglich zunächst den Normalenvektor und die Normalenform der Ebene, um auf die Koordinatengleichung zu schließen.
Den Normalenvektor erhältst du durch das Vektorprodukt der Richtungsvektoren, das du mit deinem Rechner bestimmen kannst.
Die Normalenform baut sich nach der folgenden Form auf.

$E: (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}) \cdot \overrightarrow{n}$

Folglich benötigst du den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ deiner Ebene. Dieser steht senkrecht zu den Richtungsvektoren und kann durch das Kreuzprodukt selbiger gebildet werden.

1. Schritt: Normalenvektor bestimmen

Bestimme den Normalenvektor nun mit deinem Rechner über das Vektorprodukt. Den Befehl dafür findest du unter `menu → 7:Matrix/Vektor → C:Vektor → 2:Kreuzprodukt`.



Somit ergibt sich der Normalenvektor mit $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Du kannst nun die Normalenform der Ebene aufstellen und aus dieser die Koordinatenform bestimmen.

2. Schritt: Normalenform und Koordinatenform

Die Normalenform baut sich wie folgt auf.

$E: (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}) \cdot \overrightarrow{n}$

Der Vektor $\overrightarrow{p}$ wird beschrieben durch den Ortsvektor eines Punktes in der Ebene.
Auch der Stützvektor der Ebene ist ein solcher Ortsvektor. Somit kannst du diesen für den Vektor $\overrightarrow{p}$ verwenden.
Somit gilt:

$$\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die folgende Normalenform der Ebene E.

$$E: \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Multiplizierst du diese aus, so erhältst du die Koordinatenform mit der Form

$$E: n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3$$

Setze die Werte aus den einzelnen Vektoren ein, um die Normalenform zu bestimmen.

$$E: 2 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 8$$

Vereinfache diesen Term

$$E: 2 \cdot x + 2 \cdot y + z = 8$$

Somit hast du die Koordinatengleichung von E bestimmt.

▶ Achsenschnittpunkte bestimmen

Die Achsenschnittpunkte werden auch Spurpunkte genannt.
Um den Achsenschnittpunkt mit einer bestimmten Achse zu bestimmen, z.B. z-Achse, musst du alle anderen Koordinaten in der Koordinatengleichung gleich Null setzen, im Beispiel also x und y.
Dies ist darin begründet, dass die Spurpunkte X, Y und Z die Koordinaten $X(x \mid 0 \mid 0)$, $Y(0 \mid y \mid 0)$ und $Z(0 \mid 0 \mid z)$ haben.

Löse dann die Gleichung so auf, dass du einen Wert für deine Koordinate erhältst.

Berechne nach dieser Voraussetzung die Spurpunkte der Ebene E.

<u>x-Achsenschnittpunkt:</u>

$$\begin{aligned} 2 \cdot x + 2 \cdot 0 + 0 &= 8 \\ 2 \cdot x &= 8 \qquad \mid :2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Somit hat der x-Achsenschnittpunkt die Koordinaten $X(4 \mid 0 \mid 0)$.

<u>y-Achsenschnittpunkt:</u>

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 + 2 \cdot y + 0 &= 8 \\ 2 \cdot y &= 8 \qquad \mid :2 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Somit hat der y-Achsenschnittpunkt die Koordinaten $Y(0 \mid 4 \mid 0)$.

<u>z-Achsenschnittpunkt:</u>

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + z &= 8 \\ z &= 8 \end{aligned}$$

Somit hat der z-Achsenschnittpunkt die Koordinaten $Z(0 \mid 0 \mid 8)$.

▶ Schnittwinkel berechnen

Den Schnittwinkel zweier Ebenen erhältst du über die Formel:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}\right)$$

Dabei sind $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ die Normalenvektoren der beiden Ebenen. Den Normalenvektor der Ebene E hast du eben berechnet mit:

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

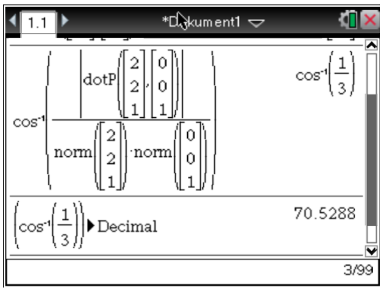
Der Normalenvektor der $x-y$-Ebene hat allgemein die Form:

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechne also mit dem CAS

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}\right)$$

Den Befehl zum Berechnen des Skalarprodukts findest du unter `menu → 7:Matrix/Vektor → C:Vektor → 3:Skalarprodukt`.
Den Befehl zur Bestimmung des Betrags eines Vektors findet sich dann unter `menu → 7:Matrix/Vektor → 7:Normen → 1:Norm`.



Folglich schneiden sich die beiden Ebenen unter einem Winkel von $\alpha \approx 70{,}53°$.

b) ### ▶ Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E (7P)

Die Lagebeziehung fragt nach der Lage zweier Objekte im Raum zueinander.
Hier ist nach der Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Ebene E gefragt.

Es gibt zwei Möglichkeiten, wie diese zu einander liegen können:

1. Sie verlaufen parallel
2. Gerade liegt in der Ebene
3. Sie schneiden sich

Verlaufen eine Gerade und eine Ebene parallel, so steht der Normalenvektor der Ebene senkrecht auf dem Richtungsvektor der Gerade.
Ihr Skalarprodukt ist 0.

Dies gilt auch, wenn die Gerade in der Ebene liegt. Allerdings muss zusätzlich noch jeder Punkt der Geraden in der Ebene liegen. Prüfe dazu einen Punkte der Geraden, indem du ihn in die Koordinatengleichung der Ebene einsetzt.
Liegt der Punkt in der Ebene, so verläuft die Gerade in der Ebene. Ansonsten verlaufen Ebene und Gerade parallel.

Schneiden sich die Gerade und die Ebene, so haben sie einen Schnittpunkt.

Prüfe zunächst, ob der Richtungsvektor der Geraden und der Normalenvektor der Ebene senkrecht aufeinander stehen.

1. Schritt: Lage von Normalenvektor und Richtungsvektor bestimmen

Den Normalenvektor der Ebene hast du bereits bestimmt.

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Den Richtungsvektor der Geraden kannst du aus der gegebenen Geradengleichung entnehmen.
Diese baut sich allgemein wie folgt auf, wobei $\overrightarrow{v}$ der Richtungsvektor und $\overrightarrow{p}$ der Stützvektor.

$g: \overrightarrow{p} + t \cdot \overrightarrow{v}$

Daraus ergibt sich, dass der Vektor

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Richtungsvektor der Geraden ist. Prüfe nun die erste Möglichkeit, dass die Gerade und die Ebene parallel verlaufen.
Verwende dafür den Normalenvektor der Ebene und den Richtungsvektor der Geraden. Berechne das Vektorprodukt. Es muss gelten

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

damit die Bedingung erfüllt ist.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} &= 0 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 &= 0 \\ -2 + 2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Somit ist das Vektorprodukt gleich Null, sodass bewiesen ist, dass die beiden Vektoren senkrecht auf einander stehen.

Prüfe nun noch, ob die Gerade und die Ebene parallel verlaufen oder die Gerade in der Ebene liegt.

2. Schritt: Prüfen, ob Gerade in Ebene verläuft

Führe nun die Punktprobe durch, um zu bestimmen, ob die Gerade in der Ebene verläuft oder nicht.

Setze dazu die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden in die Koordinatengleichung der Ebene E ein. Der Stützvektor der Geraden gibt dir einen solchen Punkt. Dieser hat die folgenden Koordinaten.

$P(-1 \mid 5 \mid 0)$

Setze nun die Koordinaten von P in die Koordinatengleichung von E ein. Ergibt sich eine wahre Aussage, so liegt die Gerade in der Ebene. Die Koordinatengleichung von E lautet:

$E: 2 \cdot x + 2 \cdot y + z = 8$

Daraus ergibt sich folgende Gleichung.

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + 0 &= 8 \\ (-2) + 10 + 0 &= 8 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

Es ergibt sich eine wahre Aussage. Nach der Vorgabe liegt die Gerade also in der Ebene.

▶ Lagebeziehung von F und E

Für die Lagebeziehung zweier Ebenen gilt, dass sie entweder parallel verlaufen, identisch sein oder sich schneiden können.

Der Schnitt zwischen zwei Ebenen wird beschrieben durch eine Schnittgerade.

Zwei Ebenen verlaufen genau dann parallel, wenn ihre Normalenvektoren Vielfache von einander sind. Es gilt:

$\overrightarrow{n_F} = k \cdot \overrightarrow{n_E}$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Liegt außerdem noch ein Punkt von E in F, so sind die Ebenen identisch.

Betrachte folglich zunächst das Verhältnis der Normalenvektoren. Du kannst drei Gleichungen aufstellen, um dies zu untersuchen. Diese setzen sich aus den Koordinaten der Normalenvektoren zusammen.

$\overrightarrow{n_{F_1}} = k_1 \cdot \overrightarrow{n_{E_1}}$

$\overrightarrow{n_{F_2}} = k_2 \cdot \overrightarrow{n_{E_2}}$

$\overrightarrow{n_{F_3}} = k_3 \cdot \overrightarrow{n_{E_3}}$

Es muss gelten $k_1 = k_2 = k_3$. Gilt dies, so sind die Ebenen parallel. Ansonsten schneiden sie sich in einer Geraden.

1. Schritt: Auf Parallelität prüfen

Um auf Parallelität zu prüfen, benötigst du zunächst die beiden Normalenvektoren. Den Normalenvektor von E hast du bereits mit diesen Werten bestimmt:

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Den Normalenvektor von F kannst du aus der Koordinatenform ablesen. Die Koordinatenform baut sich so auf:

$F : n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = p$

$F : x + y - 0,5 \cdot z = 4$

Aus dieser Angabe kannst du nun den Normalenvektor von F bestimmen. Dieser ergibt sich mit den folgenden Werten.

$$\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die folgende Gleichung, mit der du prüfen kannst, ob E und F parallel verlaufen.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit lautet dein dreizeiliges Gleichungssystem wie folgt.

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 1 & = & k_1 \cdot 2 \quad |:2 \\ \text{II} & 1 & = & k_2 \cdot 2 \quad |:2 \\ \text{III} & -0,5 & = & k_3 \cdot 1 \\ \hline \text{I} & 0,5 & = & k_1 \\ \text{II} & 0,5 & = & k_2 \\ \text{III} & -0,5 & = & k_3 \end{array}$$

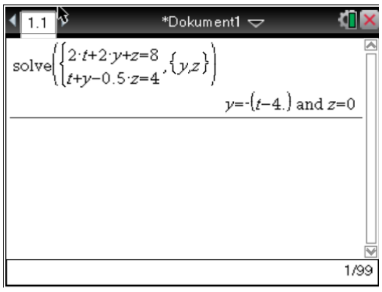
Somit gilt nicht $k_1 = k_2 = k_3$, da $k_1 = k_2$, aber $k_1 \neq k_3$ und $k_2 \neq k_3$. Die Normalemvektoren sind somit nicht Vielfache voneinander. Folglich verlaufen die Ebenen nicht parallel zueinander.

2. Schritt: Schnittgerade bestimmen

Die Schnittgerade bestimmst du, indem du ein lineares Gleichungssystem aus den Koordinatengleichungen der Ebenen aufstellst.

Da es sich allerdings um 3 Variablen handelt und nur um 2 Gleichungen kannst du eigentlich das Gleichungssystem nicht eindeutig lösen. Dies ist allerdings darin begründet, dass es sich bei dem Schnitt von zwei Ebenen um eine Gerade und nicht um einen Punkt handelt.

Setze eine Variable folglich gleich t, bspw. $x = t$ und löse dann das Gleichungssystem mit Hilfe des CAS. Den Befehl zum Lösen eines Gleichungssystems findest du unter `menu → 3:Algebra → 7:Gleichungssystem lösen`.



Deine Koordinatengleichungen hatten die Form

$E: 2\cdot x + 2\cdot y + z = 8$

$F: x + y - 0{,}5\cdot z = 4$

Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & 2\cdot t & + & 2\cdot y & + & z & = & 8 \\ \text{II} & t & + & y & - & 0{,}5\cdot z & = & 4 \end{array}$$

Damit ergeben sich die Koordinaten mit:

$x = t \quad y = 4 - t \quad z = 0.$

Damit ergibt sich die Gleichung der Schnittgerade mit: $s: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) ▸ **Zeigen, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist** (10P)

Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn zwei der Dreiecksseiten gleich lang sind. Folglich musst du die Länge der Seiten bestimmen. Diese haben die Bezeichnung $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$.

Die Länge von Strecken zwischen zwei Punkten kannst du über die Länge des Vektors, den die beiden Punkte aufspannen bestimmen.
Folglich benötigst du die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$, um die gesuchten Seitenlängen zu bestimmen.
Einen Vektor kannst du wie folgt aufstellen.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Berechne nach dieser Vorgabe die Vektoren und im Anschluss ihre Länge. Vergleiche die Längen. Es müssen sich zweimal die selbe Länge ergeben, damit das Dreieck gleichschenklig ist.

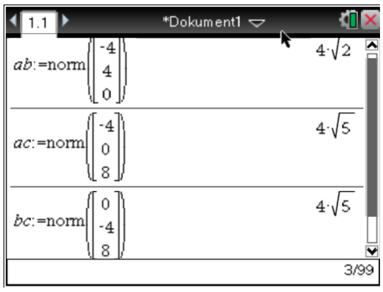
Es ergeben sich die folgenden Vektoren.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Nun kannst du die Länge der Seiten über den Betrag des jeweiligen Vektors bestimmen. Den Befehl zur Bestimmung des Betrags eines Vektors findet sich dann unter `menu → 7:Matrix/Vektor → 7:Normen → 1:Norm`.



$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = 4 \cdot \sqrt{2}$

$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = 4 \cdot \sqrt{5}$

$\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = 4 \cdot \sqrt{5}$

Du kannst erkennen, dass die Längen der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gleich. Folglich ist das Dreieck gleichschenklig.

▶ Größe des Winkels ACB bestimmen

Der Winkel ACB wird von den Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ eingeschlossen.
Der „Buchstabe" in Mitte bezeichnet den Punkt, an dem der Winkel liegt.

Den Winkel zwischen zwei Vektoren kannst du über die Formel

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}\right)$$

Deine Vektoren hatten die folgenden Koordinaten.

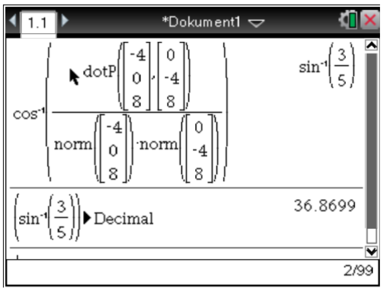
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Berechne also mit dem CAS

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right|}\right)$$

Den Befehl zum Berechnen des Skalarprodukts findest du unter `menu → 7:Matrix/Vektor → C:Vektor → 3:Skalarprodukt`.

Den Befehl zur Bestimmung des Betrags eines Vektors findet sich dann unter `menu → 7:Matrix/Vektor → 7:Normen → 1:Norm`.



Somit ergibt sich der Winkel ACB mit $36,87°$.

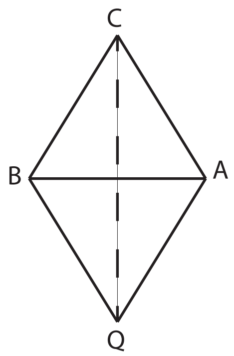
▶ Punkt Q finden

Der Punkt Q soll nach der Aufgabenstellung das Dreieck zu einer Raute ergänzen.

Eine Raute hat die Eigenschaft, dass alle Seiten gleich lang sind. Im Gegensatz zu einem Quadrat müssen allerdings immer nur zwei der vier Innenwinkel identisch sein.

Da du bereits zwei Seiten bestimmt hast, die gleich lang sind, kannst du den Punkt Q so legen, dass sich zwei weitere Seiten der Raute ergeben, die genauso lang sind.

Eine Raute baut sich wie folgt auf. Die beiden Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind gleich lang. Die Seite $\overline{AB}$ ist kürzer. Den gesuchten Aufbau der Raute kannst du dir wie in folgender Skizze dargestellt vorstellen.



Du kannst erkennen, dass sich die Strecken $\overline{CQ}$ und $\overline{AB}$ im Mittelpunkt von $\overline{AB}$ schneiden. Die Strecke $\overline{CQ}$ entspricht gerade der Strecke $2 \cdot \overline{CM}$.

Den Mittelpunkt M kannst du über die folgende Formel bestimmen.

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2} \mid \frac{a_2+b_2}{2} \mid \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Gehe nach den folgenden Schritten vor, um den Punkt Q zu bestimmen.

1. Ermittle den Punkt M nach oben genannter Formel
2. Stelle den Vektor $\overrightarrow{CM}$ auf
3. Bestimme den Punkt Q über den Vektor $\overrightarrow{CM}$ wie in obiger Skizze abgebildet.

1. Schritt: Punkt M ermitteln

Der Punkt M ist wie oben genannt der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Die Koordinaten von A und B sind dir gegeben mit

$A(4 \mid 0 \mid 0)$ und $B(0 \mid 4 \mid 0)$

Setze diese Koordinaten in die oben genannte Formel ein, um den Punkt M zu bestimmen.

$$M\left(\frac{4+0}{2} \mid \frac{0+4}{2} \mid \frac{0+0}{2}\right) = M(2 \mid 2 \mid 0)$$

Somit hast du den Punkt M mit den Koordinaten $M(2 \mid 2 \mid 0)$ bestimmt.

2. Schritt: Vektor $\overrightarrow{CM}$ aufstellen

Einen Vektor vom Punkt C zu M stellst du allgemein über

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}$$

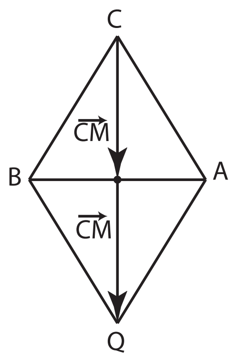
auf. Setze die Koordinaten deiner Punkte ein und berechne den Vektor $\overrightarrow{CM}$, über den du dann direkt den Punkt Q bestimmen kannst.

$$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Somit hast du den Vektor $\overrightarrow{CM}$ bestimmt, über den du nun Q bestimmen kannst.

3. Schritt: Punkt Q bestimmen

Den Punkt Q kannst du nun über den Vektor $\overrightarrow{CM}$ bestimmen. Das folgende Bild zeigt dir, wie du mithilfe des Vektors $\overrightarrow{CM}$ den Punkt Q bestimmst.



Du kannst erkennen, dass vom Punkt C aus zweimal der Vektor $\overrightarrow{CM}$ gegangen wird, um den Punkt Q zu erreichen. Somit gilt:

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + 2 \cdot \overrightarrow{CM}$$

Berechne aus dieser Vorgabe die Koordinaten von Q.

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich also, dass der Punkt Q die Koordianten $Q(4 \mid 4 \mid -8)$ besitzt, um das Dreieck ABC zu einer Raute zu ergänzen.

▶ Möglichen Punkt C^* bestimmen

Nun ist ein Punkt C^* gesucht, der so auf der z-Achse liegen soll, dass Der Winkel AC^*B genau 60° groß ist.
Stelle zunächst die Vektoren $\overrightarrow{AC^*}$ und $\overrightarrow{BC^*}$ auf. Über die Formel zur Berechnung für Winkel mit

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{AC^*} \circ \overrightarrow{BC^*}|}{|\overrightarrow{AC^*}| \cdot |\overrightarrow{BC^*}|}\right)$$

erhältst du dann die Bedingung, um C^* zu bestimmen.

Da der Punkt C^* auf der x-Achse liegen soll, hat er allgemein die Koordinaten $C^* = (0 \mid 0 \mid c)$. Somit ergeben sich die Vektoren $\overrightarrow{AC^*}$ und $\overrightarrow{BC^*}$ mit:

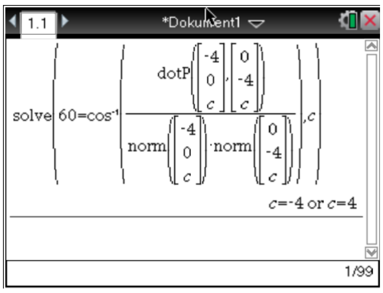
$$\overrightarrow{AC^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC^*} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ c \end{pmatrix}$$

Setze diese Vektoren nun in die obige Formel ein und löse die Gleichung

$$60^\circ = \cos^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{AC^*} \circ \overrightarrow{BC^*}|}{|\overrightarrow{AC^*}| \cdot |\overrightarrow{BC^*}|}\right)$$

mit deinem CAS. Den Befehl zum Berechnen des Skalarprodukts findest du unter `menu → 7:Matrix/Vektor → C:Vektor → 3:Skalarprodukt`.
Den Befehl zur Bestimmung des Betrags eines Vektors findet sich dann unter `menu → 7:Matrix/Vektor → 7:Normen → 1:Norm`.

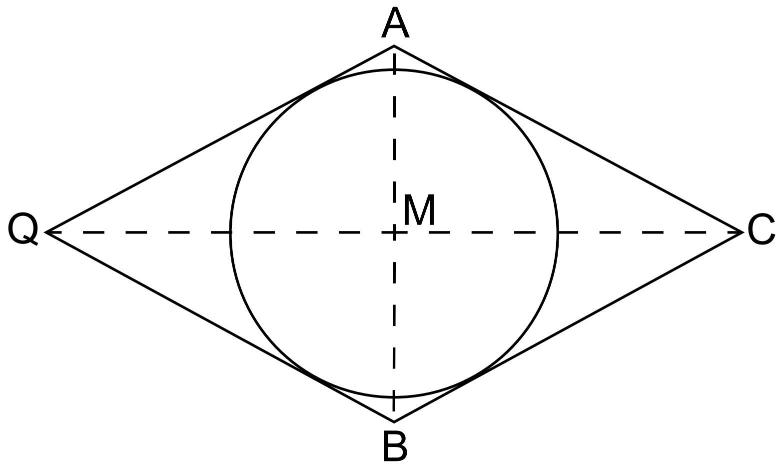


Somit ergibt sich der gesuchte Wert für c mit $c = \pm 4$, sodass sich zwei Punkte ${C^*}_1$ und ${C^*}_2$ ergeben mit den Koordinaten

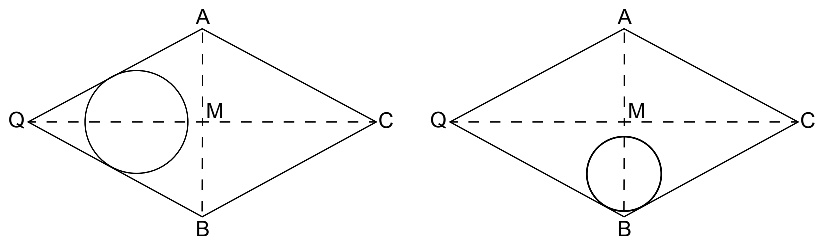
${C^*}_1\,(0 \mid 0 \mid 4)$; ${C^*}_2\,(0 \mid 0 \mid -4)$

d) ► **Kreis in der Raute** (6P)

Der Kreis soll in die Raute einbeschrieben werden. Folglich soll er die Seiten der Raute niemals schneiden. Dies kannst du dir so vorstellen:



Betrachtest du die Vorgabe der Aufagbe, so kannst du erkennen, dass der Kreis denselben Mittelpunkt haben muss wie die Raute, damit er den größtmöglichen Radius hat. Würdest du beispielsweise einen anderen Mittelpunkt wählen, so ergäbe sich die Situation so:



Dies ist darin begründet, dass die Grenzen, die durch die Seiten der Raute beschrieben werden, nicht durch den Kreis überschritten werden dürfen.

1. Schritt: Mittelpunkt des Kreises bestimmen

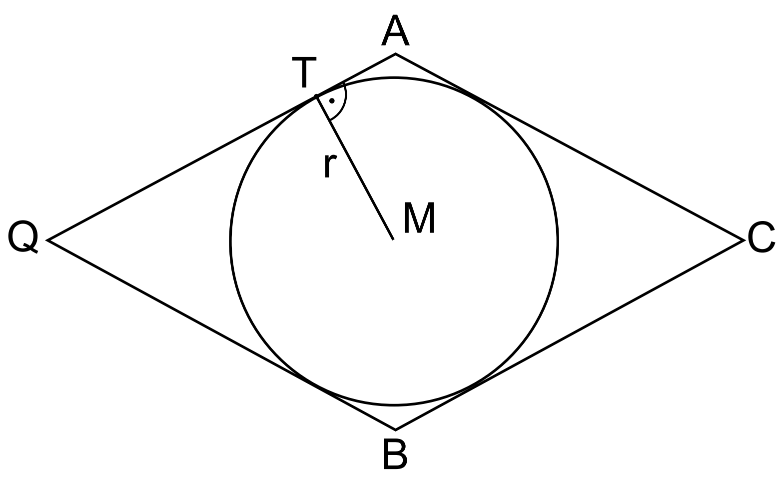
Oben haben wir festgestellt, dass der Kreis möglichst groß wird, wenn der Mittelpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkt der Raute übereinstimmt.

Den Mittelpunkt der Raute hast du bereits als Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ bestimmt. Somit ergibt sich der folgende Mittelpunkt M des Kreises.

$M(2 \mid 2 \mid 0)$

2. Schritt: Radius des Kreises bestimmen

Da der Kreis in die Raute einbeschrieben werden soll, berührt er an vier Stellen die Raute. Der Radius steht in diesen Stellen senkrecht auf der jeweiligen Seite. Dies soll das folgende Bild verdeutlichen.



Folglich musst du den Punkt T bestimmen und dann den Abstand von M zu T, um den Radius zu erhalten.

►► Lösungsweg A: Abstand mittels Hilfsebene bestimmen

Den Abstand kannst du als Abstand von einer Geraden, dargestellt durch die Seite QA, zu einem Punkt, hier M, bestimmen.

Bestimme zunächst Punkt T als Schnittpunkt einer Hilfsebene mit einer Gerade.
Die Gerade soll die Strecke $\overline{QA}$ enthalten. Die Hilfsebene soll A enthalten und senkrecht zur Geraden stehen.

Die Hilfsebene hat folglich den Normalenvektor $\overrightarrow{QA}$ und den Stützvektor $\overrightarrow{OM}$. Die Gerade soll durch die Punkte A und Q aufgespannt werden. Wähle für den Stützvektor $\overrightarrow{OQ}$ und den Richtungsvektor $\overrightarrow{QA}$.
Weil der Normalenvektor der Ebene mit dem Richtungsvektor der Geraden übereinstimmt, schneiden sich Gerade und Ebene orthogonal.

Da der Vektor $\overrightarrow{MT}$ in der Hilfsebene liegt, steht die Gerade auch senkrecht auf dem Vektor. Somit beschreibt die Länge des Vektors $\overrightarrow{MT}$ gerade den Radius des Kreises.
Stelle nun die Gerade von QA auf und bestimme den Schnittpunkt mit der Hilfsebene, die wir H nennen.

1. Schritt: Gerade QA aufstellen

Für die Gerade benötigst du den Richtungsvektor $\overrightarrow{QA}$ und den Stützvektor $\overrightarrow{OQ}$.
Einen Vektor, der von zwei Punkten aufgespannt wird, bestimmst du so:

$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OQ}$.

Setze also die Koordinaten von $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OQ}$ ein, sodass du die Gerade dann in der folgenden Form aufstellen kannst.

$QA: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{QA}$

Es ergeben sich die folgenden Vektoren für $\overrightarrow{QA}$ und $\overrightarrow{OA}$.

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{QA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich die Geradengleichung mit

$$QA: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Ebenengleichung von H aufstellen

Die Ebenengleichung von H kannst du mittels des Punktes M und dem eben bestimmten Vektor $\overrightarrow{QA}$ aufstellen.

Bilde dazu zunächst die Normalenform der Ebene nach

$H: \left(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{OM}\right) \cdot \overrightarrow{QA} = 0$

Der Punkte M hat die Koordinaten $M(2 \mid 2 \mid 0)$ und der Vektor $\overrightarrow{QA}$ lautet:

$$\overrightarrow{QA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich somit die folgende Normalenform der Ebene, aus der du dann die Koordinatengleichung und abschließend den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene bestimmen kannst.

$$H: \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$$

Multipliziere diese Form aus, sodass du die Koordinatengleichung wie folgt erhältst.

$H: 0 \cdot x + (-4) \cdot y + 8 \cdot z = 0 \cdot 2 + (-4) \cdot 2 + 8 \cdot 0$

Zusammengefasst erhältst du die Form

$H: -4 \cdot y + 8 \cdot z = -8$

3. Schritt: Schnittpunkt T bestimmen

Setze nun die Koordinaten der Geradengleichung in die Ebenengleichung ein, wobei jede Zeile der Geraden eine Koordinate darstellt:

1. Zeile: x-Koordiante

2. Zeile: y-Koordiante
3. Zeile: z-Koordiante

Es ergeben sich die folgenden Koordinaten der Gleichung:

$x = 4 + t \cdot 0 = 4$

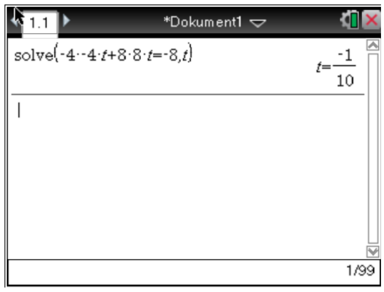
$y = 0 + t \cdot (-4) = -4 \cdot t$

$z = 0 + t \cdot 8 = 8 \cdot t$

Setze diese Koordinaten nun in die Ebenengleichung ein, sodass du die folgende Gleichung erhältst:

$-4 \cdot (-4 \cdot t) + 8 \cdot (8 \cdot t) = -8$

Somit ergibt sich der Wert für t mit $t = -\frac{1}{10} = -0,1$.



Setze diesen Wert für t in die Geradengleichung ein, um den Vektor $\overrightarrow{OT}$ zu erhalten.

$$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0,4 \\ -0,8 \end{pmatrix}$$

Somit hat der gesuchte Punkt T die Koordinaten $T(4 \mid 0,4 \mid -0,8)$.

4. Schritt: Größe des Radius bestimmen

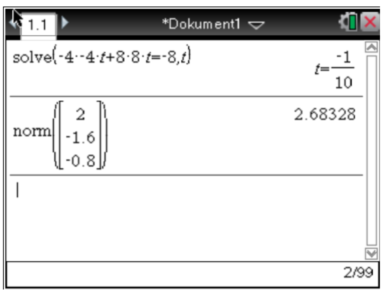
Zu Beginn der Aufgabe haben wir die Aussage getroffen, dass die Länge der Strecke $\overline{MT}$ gerade den Radius des Kreises beschreibt.
Die Länge der Strecke entspricht gerade der Länge des Vektors $\overrightarrow{MT}$.

Bestimme zunächst den Vektor $\overrightarrow{MT}$ und anschließend seine Länge über den Befehl `menu → 7:Matrix/Vektor → 7:Normen → 1:Norm`

Es ergibt sich der Vektor $\overrightarrow{MT}$ wie folgt.

$$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0,4 \\ -0,8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1,6 \\ -0,8 \end{pmatrix}$$

Berechne nun die Länge mit dem CAS.



Somit hast du abschließend den Radius des Kreises mit 2,68 LE bestimmt.

▸▸ Lösungsweg B: Abstand Punkt zu Lotfußpunkt

Den Abstand vom Punkt M Zur Seite QA kannst du bestimmen, indem du den Abstand von M zum Lotfußpunkt L auf der Geraden QA bestimmst.

Der Lotfußpunkt zeichnet sich dadurch aus, dass der Vektor $\overrightarrow{ML}$ in diesem Punkt gerade senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden QA steht. Stelle zunächst den allemeinen Punkt L auf QA auf und berechne den Richtungsvektor von QA sowie den allgemeinen Vektor $\overrightarrow{ML}$.
Da die beiden Vektoren im Punkt L senkrecht aufeinander stehen sollen, gilt:

$$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{ML} = 0$$

Aus dieser Gleichung kannst du dann den Punkt L bestimmen.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren kannst du so bestimmen:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = q_1 \cdot m_1 + q_2 \cdot m_2 + q_3 \cdot m_3$$

Bestimme zunächst die Gerade QA.

1. Schritt: Gerade QA aufstellen

Für die Gerade benötigst du den Richtungsvektor $\overrightarrow{QA}$ und den Stützvektor $\overrightarrow{OQ}$.
Einen Vektor, der von zwei Punkten aufgespannt wird, bestimmst du so:

$$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OQ}.$$

Setze also die Koordinaten von $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OQ}$ ein, sodass du die Gerade dann in der folgenden Form aufstellen kannst.

$$QA: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{QA}$$

Es ergeben sich die folgenden Vektoren für $\overrightarrow{QA}$ und $\overrightarrow{OA}$.

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{QA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich die Geradengleichung mit

$$QA: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Allgemeinen Punkt L definieren

Allgemeine Punkte, die auf Geraden liegen, haben die Koordinaten entsprechend der Koordinaten der Gerade. Folglich sind sie abhängig von einem Parameter.

In diesem Fall hast du die Gerade soeben bestimmt. Lies folglich ihre Koordinaten aus und bilde daraus den Punkt L.

Die Koordinaten lauten wie folgt.

$x:\ 4+0\cdot t$

$y:\ 0+(-4)\cdot t$

$z:\ 0+8\cdot t$

Setze diese für die Koordinaten von L ein.

$L(x \mid y \mid z) = L(4+0\cdot t \mid 0+(-4)\cdot t \mid 0+8\cdot t) = L(4 \mid -4\cdot t \mid 8\cdot t)$

Somit hast du nun den Punkt L definiert. Bestimme nun den Vektor $\overrightarrow{ML}$ und bestimme anschließend L über das Skalarprodukt des Richtungsvektors von QA und den Vektor $\overrightarrow{ML}$.

3. Schritt: Vektor $\overrightarrow{ML}$ bestimmen

Einen Vektor bestimmst du allgemein über:

$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OM}$

Daraus ergibt sich die folgende Gleichung zur Berechnung von $\overrightarrow{ML}$:

$$\overrightarrow{ML} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4\cdot t \\ 8\cdot t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2-4\cdot t \\ 8\cdot t \end{pmatrix}$$

Bestimme nun den Punkt L über das Skalarprodukt des Richtungsvektors von QA und den Vektor $\overrightarrow{ML}$.

5. Schritt: Punkt L bestimmen

Da der Punkt L der Lotfußpunkt sein soll, gilt, dass das Skalarprodukt des Vektors $\overrightarrow{ML}$ und dem Vektor $\overrightarrow{QA}$ Null werden soll.

Stelle also zunächst das Skalarprodukt der beiden Vektoren auf und löse dann nach t auf. Dies kannst du mit dem CAS erledigen. Den Befehl für das Skalarprodukt findest du unter `menu → 7:Matrix/Vektor → C:Vektor → 3:Skalarprodukt`. Löse dann die Gleichung mit dem `solve`-Befehl.

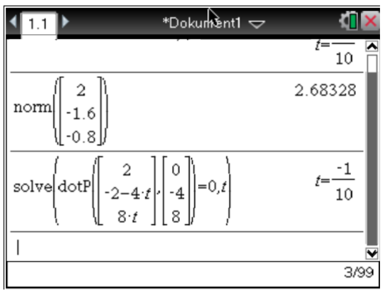
Es ergibt sich also diese Gleichung:

$\overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{QA} = 0$

Der Punkt L hat also die Koordinaten

$L(2 \mid -4\cdot(-0{,}1) \mid 8\cdot(-0{,}1))$ und vereinfacht

$L(2 \mid 0{,}4 \mid -0{,}8)$



6. Schritt: Abstand L zu M bestimmen

Der Abstand von L zu M beschreibt gerade die Länge des Radius und kann über die Länge des Vektors $\overrightarrow{ML}$ bestimmt werden.

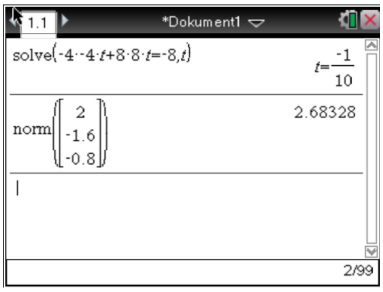
Den Vektor $\overrightarrow{ML}$ hast du oben in Abhängigkeit von t bestimmt. Außerdem hast du nun auch den Parameter t. Setze diesen Wert für t in den Vektor $\overrightarrow{ML}$ ein und berechne seine Länge.

Die Länge eines Vektors bestimmst du über den Befehl `menu → 7:Matrix/Vektor → 7:Normen → 1:Norm`.

Es ergibt sich also der Vektor $\overrightarrow{ML}$ mit den folgenden Koordinaten.

$$\overrightarrow{ML} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2-4\cdot(-0,1) \\ 8\cdot(-0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1,6 \\ -0,8 \end{pmatrix}$$

Berechne nun die Länge mit dem CAS.



Somit hast du abschließend den Radius des Kreises mit 2,68 LE bestimmt.