a) **► Wahrscheinlichkeiten berechnen** (8P)

Im Aufgabenteil a) wird jeweils eine Stichprobe von EU-Bürgern bzw. von Bundesbürgern betrachtet und es wird nach der Wahrscheinlichkeit dafür gesucht, dass eine bestimmte Anzahl von ihnen „Sportmuffel" sind. Aus dem Einleitungstext zur Aufgabe weißt du, dass

- jeder EU-Bürger mit einer Wahrscheinlichkeit von 39 % ein „Sportmuffel" ist,
- jeder Bundesbürger mit einer Wahrscheinlichkeit von 31 % ein „Sportmuffel" ist.

Die Anzahl der „Sportmuffel" in den jeweiligen Stichproben kann also je durch eine **binomialverteilte** Zufallsgröße beschrieben werden.

Ereignis A:

Zunächst wird eine Gruppe von 50 zufällig ausgewählten EU-Bürgern betrachtet. Sei X_1 die Zufallsgröße, welche die Anzahl der „Sportmuffel" in dieser Gruppe beschreibt. X_1 kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 50$ und $p = 0,39$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich genau 19 „Sportmuffel" in der Gruppe befinden. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 = 19)$.

Ereignis B:

Nun wird eine Gruppe von 15 zufällig ausgewählten Bundesbürgern betrachtet. Sei X_2 die Zufallsgröße, welche die Anzahl der „Sportmuffel" in dieser Gruppe beschreibt. X_2 kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 15$ und $p = 0,31$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich höchstens 2 „Sportmuffel" in der Gruppe befinden. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 \leq 2)$.

b) **► Anteil der zu erwartenden „Sportmuffel" berechnen** (3P)

Betrachtet wird eine Gruppe von 100 Bundesbürgern. Du weißt, dass jeder dieser Bundesbürger mit einer Wahrscheinlichkeit von 31 % ein „Sportmuffel" ist. Sei Y die Zufallsgröße, welche die Anzahl der „Sportmuffel" in dieser Gruppe beschreibt. Wie bereits in a) kann diese Zufallsgröße als binomialverteilt angenommen werden. Die Parameter für die Binomialverteilung sind dieses Mal $n = 100$ und $p = 0,31$.

Gefragt ist zunächst nach der Anzahl der „Sportmuffel", die man erwarten kann, d.h. nach dem **Erwartungswert** $E(Y)$ von Y.

► Wahrscheinlichkeit berechnen

Du weißt, dass sich in der Gruppe erwartungsgemäß 31 „Sportmuffel" befinden. Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass tatsächlich genau so viele „Sportmuffel" in der Gruppe sind. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(Y = E(Y))$.

c) ▶ **Wahrscheinlichkeit für einen Mann berechnen** (9P)

Du weißt aus der Aufgabenstellung, dass:

- eine zufällig ausgewählte Person mit einer Wahrscheinlichkeit von 48,4 % ein Mann ist,
- eine zufällig ausgewählte Person mit einer Wahrscheinlichkeit von 13 % Sport in einem Verein treibt und
- ein zufällig ausgewählter **Mann** mit einer Wahrscheinlichkeit von 21 % Sport in einem Verein treibt.
- Also folgt mit der Pfadregel, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,484 \cdot 0,21 \approx 0,102$ eine Person ein Mann ist **und** in einem Verein Sport treibt.

Sei M das Ereignis „Eine Person ist ein Mann“ und V das Ereignis „Eine Person treibt Sport in einem Verein“ und seien $\overline{M}$ und $\overline{V}$ die zugehörigen Gegenereignisse. Du kannst die Informationen aus dem Aufgabentext auch über diese Ereignisse formulieren.

Gesucht ist die nun Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person, die Sport in einem Verein treibt, ein Mann ist. Anders formuliert: Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person ein Mann ist, **unter der Bedingung**, dass sie in einem Verein Sport treibt. Dies ist eine **bedingte Wahrscheinlichkeit**, wobei V die Bedingung ist. In Formeln:

$P_V(M)$

▶ **Wahrscheinlichkeit für ein Vereinsmitglied berechnen**

Die parallele Formulierung der Aufgabenstellung legt nahe, dass auch hier eine bedingte Wahrscheinlichkeit zu berechnen ist. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person ein Vereinsmitglied ist, **unter der Bedingung**, dass sie eine Frau ist. Wenn du die Bezeichnungen der Ereignisse M und V von oben verwendest, so kannst du diese bedingte Wahrscheinlichkeit formulieren als:

$P_{\overline{M}}(V)$.

Im Gegensatz zu oben sind hier nicht alle benötigten Wahrscheinlichkeiten bekannt. Du kannst die fehlende Wahrscheinlichkeit z.B. über ein Baumdiagramm berechnen.

d) ▶ **Kleinste mögliche Zahl *m* bestimmen** (6P)

Die Frau schießt 150 Strafstöße und hat eine Trefferquote von 85 %. Das heißt, dass jeder ihrer Schüsse mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % ein Treffer ist. Die Anzahl ihrer Treffer kannst du also durch eine **binomialverteilte** Zufallsgröße beschreiben, wir nennen sie Z. Die Parameter für die Binomialverteilung sind dann $n = 150$ und $p = 0,85$.

Ein Fan F wettet nun mit Fan G, dass die Frau **höchstens *m*** Treffer landet. Er gewinnt, wenn die Frau dann tatsächlich höchstens m Treffer schießt. Seine Gewinnwahrscheinlichkeit ist also $P(Z \leq m)$. Die Frage ist nun: Wie muss die Zahl m gewählt werden, damit Fan F mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 70 % gewinnt? Anders formuliert: Bestimme m so, dass gilt: $P(Z \leq m) \geq 0,7$.

Du kannst so vorgehen:

- Aufgrund des relativ großen Stichprobenumfangs kann die binomialverteilte Zufallsgröße Z durch eine **normalverteilte Zufallsgröße** angenähert werden. Dies ist aber nur der Fall, wenn für die Standardabweichung σ von Z gilt: $\sigma > 3$.
- Berechne die Standardabweichung σ und den Erwartungswert μ von Z und untersuche, ob diese Bedingung erfüllt ist.
- Wenn ja, so kannst du die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq m)$ mit Hilfe der Normalverteilung berechnen und diese Ungleichung mit Hilfe einer Tabelle zur Standardnormalverteilung auflösen.

e) ► **Mindestanzahl der auszuwählenden Fans bestimmen** (4P)

In diesem Aufgabenteil ist wieder von „Sportmuffeln" die Rede, allerdings kannst du die Wahrscheinlichkeiten aus den früheren Aufgabenteilen dieses Mal **nicht** verwenden. Es ist nämlich bekannt, dass sich in einer Gruppe von 50 Personen **genau ein** „Sportmuffel" befindet. Aus dieser Gruppe werden nun nacheinander k Personen „ohne Zurücklegen" ausgewählt. Gefragt ist: Wie viele Personen müssen ausgewählt werden, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 85 % den „Sportmuffel" auswählt.

Überlege, was das genau bedeutet:

- Insgesamt gibt es 49 „Sportler" und 1 „Sportmuffel".
- Insgesamt werden k Fans „ohne Zurücklegen" gezogen.
- Betrachtet wird die Situation, dass der „Sportmuffel" unter den gezogenen Fans ist. Es soll also **1 von 1** „Sportmuffeln" und $\boldsymbol{k-1}$ **von 49** Sportlern gezogen werden, wobei insgesamt $\boldsymbol{k}$ **aus 50** Fans gezogen werden.

Du kannst die zugehörige Wahrscheinlichkeit $P($„Sportmuffel" wird gezogen"$)$ über die **hypergeometrische Verteilung** berechnen. Berechne sie zunächst in Abhängigkeit von k und vereinfache so weit wie möglich. Bestimme k dann so, dass die Wahrscheinlichkeit **größer als 85 %** wird.

Dabei kann dir die Definition des **Binomialkoeffizienten** und der Fakultät hilfreich sein:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}; \qquad k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot ... \cdot 1.$$