a) (1) Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades ist zum Ursprung symmetrisch und verläuft durch den Punkt $P(3 \mid 0)$. Außerdem beträgt die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Ursprung $-4,5$. (16P)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f.

[Zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x, \quad x \in \mathbb{R}$. Der Graph von f ist unten dargestellt.]

(2) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

(3) Untersuchen Sie, ob einer der Extrempunkte der Funktion f auf der Tangente im Wendepunkt liegt.

b) Streckt man den Graphen der Funktion f in y-Richtung mit dem (positiven) Streckfaktor k, so entsteht der Graph der Funktion h. Dieser Graph schließt mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt $A = 4,5$ FE ein. (8P)

(1) Bestimmen Sie den Streckfaktor k. [Zur Kontrolle: $k = \frac{2}{9}$]

(2) Geben Sie eine Gleichung der Funktion h an.

c) (1) Gegeben ist die Gerade g_m mit der Gleichung $g_m(x) = mx, \quad x \in \mathbb{R}$, wobei $m \in \mathbb{R}$ gilt. (9P)

Beweisen Sie: Genau für $m > -1$ schneidet die Gerade g_m den Graphen der Funktion h mit der Gleichung $h(x) = \frac{1}{9}x^3 - x, \quad x \in \mathbb{R}$, in drei Punkten.

(2) Weisen Sie nach: In c)(1) ergeben sich für $m > -1$ die Schnittpunkte $P_1(0 \mid 0)$, $P_2\left(3\sqrt{m+1} \mid 3m\sqrt{m+1}\right)$ und $P_3\left(-3\sqrt{m+1} \mid -3m\sqrt{m+1}\right)$.

d) Für $m > -1$ sei $A(m)$ der Inhalt der Fläche, die von dem Graphen der Funktion h (mit der in c)(1) angegebenen Gleichung) und der Geraden g_m aus c)(1) eingeschlossen wird. (17P)

(1) Erstellen Sie eine geeignete Skizze für $m = -\frac{1}{3}$.

(2) Zeigen Sie: $A(m) = 4,5(m+1)^2$.

(3) Der Graph der Funktion h wird im I. Quadranten durch die Gerade g_3 im Punkt S und im IV. Quadranten durch die Gerade $g_{-\frac{1}{3}}$ im Punkt T geschnitten.
Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte.

(4) Stellen Sie die, Gerade g_3 und die Strecke $\overline{ST}$ in der Skizze aus d)(1) dar.

(5) Bestimmen Sie mit Hilfe von d)(2) den Inhalt der Fläche, die von der Strecke $\overline{ST}$ und dem Graphen von h eingeschlossen wird.