1.1 **► Nachweis, dass es sich um eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche handelt** (7P)

Wenn $ABCD$ eine quadratische Grundfläche bilden soll, so müssen die Eigenschaften eines Quadrats für das Viereck nachgewiesen werden.
In einem Quadrat

1. sind die gegenüberliegenden Seiten jeweils parallel und gleich lang und
2. die aneckenden Seiten stehen senkrecht aufeinander.

Zwei gegenüberliegende Seiten sind dann parallel und gleich lang, wenn die Vektoren durch diese Seiten gleich lang und Vielfache voneinander sind.
Aneckende Seiten stehen dann senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt der Vektoren durch diese Seiten gleich Null ist.

Sind diese beiden Bedingungen nachgewiesen, muss noch geprüft werden, ob mit der Spitze S tatsächlich eine Pyramide vorliegt. Dies ist nur dann der Fall, wenn

3. S nicht in der Ebene E der Grundfläche liegt.

Sind diese drei Kriterien erfüllt, handelt es sich um eine Pyramide mit der Grundfläche $ABCD$.
Prüfe die Bedingungen nacheinander:

1. Schritt: Die gegenüberliegenden Seiten sind jeweils parallel und gleich lang

Zwei gegenüberliegende Seiten sind dann parallel und gleich lang, wenn die Vektoren durch diese Seiten gleich lang und Vielfache voneinander sind.
Zwei gegenüberliegende Seiten wären etwa AB und CD, da sie keine gemeinsamen Punkte besitzen. Die jeweiligen Verbindungsvektoren ergeben sich durch die Differenz der Koordinaten:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 4-4 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 0-0 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die beiden Vektoren sind offenbar Vielfache voneinander, da sie über den Faktor -1 miteinander verknüpft sind:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (-1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zudem sind sie auch gleich lang, da $\overrightarrow{AB}$ eine Bewegung entlang der x_1-Achse von 5 LE in die negative x-Richtung darstellt und $\overrightarrow{CD}$ eine ebenso lange Bewegung *in* x-Richtung.
Die zwei gegenüberliegenden Seiten sind damit parallel und gleich lang. Für anderen zwei Seiten gilt daraus folgend das gleiche. Es handelt sich also bereits auf jeden Fall um ein Parallelogramm.

2. Schritt: Aneckende Seiten stehen senkrecht aufeinander

Aneckende Seiten stehen dann senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt der Vektoren durch diese Seiten gleich Null ist. Ist er ungleich, liegt ein anderer Winkel vor.

Zwei aneckende Seiten wären AB und BC, da sie einen gemeinsamen Punkt besitzen. Der Verbindungsvektor von AB ist bereits bekannt, derjenige von BC muss wiederum durch die Differenz der Endpunkte ermittelt werden:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ ergibt sich daraus zu

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-4) \\ 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = 0$$

Das Skalarprodukt ist Null, AB und BC schließen einen rechten Winkel ein. Wenn aber eine Ecke im Parallelogramm einen rechten Winkel aufweist, so haben alle Ecken einen rechten Winkel.

Es handelt sich also um ein Rechteck, das zudem gleich lange Seiten besitzt. Es kann sich bei der Grundfläche $ABCD$ nur um ein Quadrat handeln.

3. Schritt: S liegt nicht in der Ebene der Grundfläche

S darf nicht in der Ebene der Grundfläche liegen, dies bedeutet, dass sich durch Einsetzen in die Parametergleichung dieser Ebene keine Lösungen für die Parameter der Spannvektoren ergeben dürfen.

Um dies zu prüfen, stelle zunächst die Parametergleichung der Ebene E der Grundfläche auf. Dazu werden ein Stützvektor, sowie zwei nicht parallele Spannvektoren benötigt.

Als Stützvektor kann der Ortsvektor

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dienen. Zwei nicht parallele Spannvektoren sind $\overrightarrow{AB}$ und $B\overrightarrow{C}$, da wir zuvor gezeigt haben, dass sie senkrecht aufeinander stehen.

Die Parametergleichung von E mit den Parametern r uns s lautet damit:

$$E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$E: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Setze nun für $\overrightarrow{x}$ den Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ ein und löse die Parametergleichung in seine drei Zeilen auf:

$$\begin{pmatrix} 3,5 \\ 5 \\ 5,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 3,5 = 6 + r \cdot (-5) + s \cdot 0 \\ \text{(II)} & \quad 5 = 4 + r \cdot 0 + s \cdot (-4) \\ \text{(III)} & 5,5 = 0 + r \cdot 0 + s \cdot 3 \\ \hline \text{(I)} & 3,5 = 6 - 5r \\ \text{(II)} & \quad 5 = 4 - 4s \\ \text{(III)} & 5,5 = 3s \end{array}$$

Wenn es nun keine Lösungen für r oder s gibt, so liegt S nicht in der Ebene E.

es fällt auf, dass sich in Zeile (II) und (III) nur noch der Parameter s befindet. Haben die beiden Gleichungen nicht die gleiche Lösung für s, so ist der Nachweis erbracht.

Löse hierzu beide Gleichungen nach s auf:

$$\begin{array}{lll} \text{(II)} & 5 = 4 - 4s & \mid -4 \mid \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ \text{(IIa)} & s = -\frac{1}{4} & \\ \text{(III)} & 5,5 = 3s & \mid \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \\ \text{(III)} & s = \dfrac{11}{6} & \end{array}$$

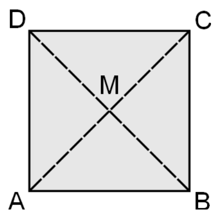
Die Lösungen der zweiten und dritten Zeile stimmen nicht überein, es gibt also keine Lösungen für s. Somit liegt S nicht in der Ebene E der Grundfläche.

Die gegenüberliegenden Seiten der Grundfläche sind parallel und gleich lang, die aneckenden Seiten stehen senkrecht aufeinander - die Grundfläche ist ein Quadrat. Zudem liegt S nicht in der Ebene der Grundfläche.

Damit ist gezeigt, dass es sich um eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche handelt.

1.2 ▶ **Nachweis der Orthogonalität von MS zur Ebene der Grundfläche.** (4P)

Wir haben bereits gezeigt, dass das Viereck $ABCD$, das die Grundfläche der Pyramide darstellt, ein Quadrat ist. In einem Quadrat schneiden sich die Diagonalen in der Mitte des Quadrats so, dass der Schnittpunkz M die Diagonalen in zwei gleich lange Strecken teilt.



Von oben betrachtet sieht das etwa so aus:

Nun soll die Gerade durch MS senkrecht auf die Ebene der Grundfläche stehen. Dies ist dann erreicht, wenn der Richtungsvektor der Geraden $\overrightarrow{MS}$ senkrecht auf die Spannvektoren der Ebene E steht, wenn also

$\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{BC}$

gilt.

Zwei Vektoren stehen immer dann orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ist. Es muss also nachgewiesen werden, dass

$\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ und $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

stimmt.

Wir kommen somit in zwei Schritten zum Ziel:

1. Schnittpunkt M der Diagonalen bestimmen.
2. Nachweisen, dass das Skalarprodukt der Spannvektoren von E mit $\overrightarrow{MS}$ Null ist.

1. Schritt: Schnittpunkt *M* der Diagonalen

In der Mitte der Strecke AC liegt der Schnittpunkt der Diagonalen M.

Die Mitte Q einer Strecke $\overline{PR}$ berechnet sich über die arithmetische Mitte der jeweiligen Koordinaten:

$Q\left(\frac{p_1+r_1}{2} \mid \frac{p_2+r_2}{2} \mid \frac{p_3+r_3}{2}\right)$

Bestimme analog die Koordinaten von M:

$M\left(\frac{a_1+c_1}{2} \mid \frac{a_2+c_2}{2} \mid \frac{a_3+c_3}{2}\right)$

$M\left(\frac{6+1}{2} \mid \frac{4+0}{2} \mid \frac{0+3}{2}\right)$

$M(3{,}5 \mid 2 \mid 1{,}5)$

2. Schritt: Nachweis, dass das Skalarprodukt Null ist

Nun soll die Gerade durch MS senkrecht auf die Ebene der Grundfläche stehen. Dies ist dann erreicht, wenn der Richtungsvektor der Geraden $\overrightarrow{MS}$ senkrecht auf die Spannvektoren der Ebene E steht.

Dazu müssen die Skalarprodukte von $\overrightarrow{MS}$ und den Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ von E Null werden.

Bestimme zunächst den Vektor $\overrightarrow{MS}$. Die Koordinaten dieses Verbindungsvektors ergeben sich aus der Differenz der Endpunkte:

$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 3{,}5-3{,}5 \\ 5-2 \\ 5{,}5-1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Berechne nun die beiden Skalarprodukte und prüfe damit, ob die Gerade durch MS senkrecht auf die Ebene der Grundfläche steht:

$$\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot (-5) + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$$

$$\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 = 0$$

Die Skalarprodukte der Spannvektoren der Ebene, in der die Grundfläche $ABCD$ liegt und dem Richtungsvektor der Geraden durch MS sind gleich Null. Die Gerade ist damit orthogonal zur Ebene.

▶ Volumen der Pyramide

Das Volumen einer Pyramide berechnet sich allgemein über die Formel:

$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}.$

Die Grundfläche G ist unserem Fall das Quadrat $ABCD$, sein Flächeninhalt ist das Quadrat der Länge einer seiner Seitenkanten, etwa AB. Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ wird allgemein über den Betrag des Vektors

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmt:

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 0^2} = 5.$$

Für die Grundfläche gilt damit:

$$G = \overline{AB}^2 = 5^2 = 25.$$

Die Höhe der Pyramide entspricht dem Abstand der Spitze S zum Lotfußpunkt M, da die Gerade durch diesen Punkt orthogonal auf die Ebene der Grundfläche steht. Die Länge der Strecke $\overline{MS}$ wird allgemein über den Betrag des Vektors

$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

bestimmt:

$$\overline{MS} = \left|\overrightarrow{MS}\right| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = 5.$$

Für das Volumen der Pyramide folgt:

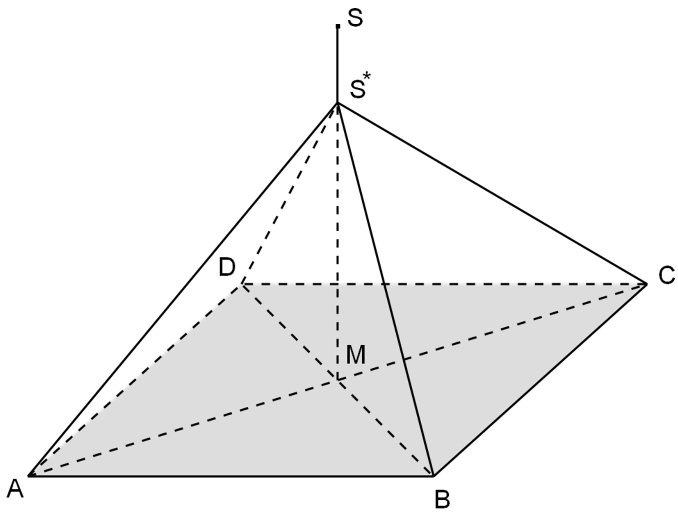
$$V = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 5 = \frac{125}{3}.$$

Das Volumen der Pyramide beträgt $\frac{125}{3}$ VE.

1.3 **▶ Spitze S^* einer Pyramide mit gleichseitigen Dreiecken zur Seitenfläche** (4P)

S^* soll die Spitze einer Pyramide werden, deren Seitenflächen alle gleichseitige Dreiecke darstellen.

Die Seitenflächen einer Pyramide sind nur dann gleich, wenn es sich um eine gerade Pyramide handelt. Bei einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche muss der Lotfußpunkt Spitze S^* daher genau in der Mitte des Quadrats liegen.



nicht maßstabsgetreu

In unserem Fall ist die Mitte der Grundfläche M. Das Lot, das senkrecht auf die Grundfläche stehen muss, liegt auf der Geraden durch MS. Folglich muss S^* auf dieser Geraden liegen.

Damit die Seitenflächen nun auch gleichseitige Dreiecke darstellen, muss gegeben sein, dass alle Seiten dieser Flächen gleich lang sind. Da bei einer geraden Pyramide alle Seitenkanten gleich lang sind, muss S^* so bestimmt werden, dass eine Seitenkante genauso lang ist wie eine Seite der Grundfläche.

S^* muss also

1. auf der Geraden durch MS liegen und
2. so gewählt werden, dass eine Seitenkante genauso lang ist, wie eine Grundflächenseite.

S^* soll auf der Geraden durch MS liegen. Bestimme dazu zunächst die Geradengleichung dieser Geraden g.

Eine Geradengleichung benötigt immer einen Stützvektor und einen Richtungsvektor, dessen Vielfache dann an den Stützvektor gesetzt werden. So kann man jeden Punkt der Geraden bestimmen.

In unserem Fall kann $\overrightarrow{OM}$ mit

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

als Stützvektor dienen. Der Richtungsvektor von g ist

$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Für die Geradengleichung folgt daraus:

$$g\colon \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM} + r \cdot \overrightarrow{MS}$$

$$g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Du kannst nun S^* als allgemeinen Punkt auf g in Abhängigkeit des Parameters r darstellen. dabei ergibt jede Zeile der Geradengleichung die entsprechende Koordinate von S^*:

$S^*(3,5 \mid 2+3r \mid 1,5+4r)$

r muss jetzt so gewählt werden, dass eine Seitenkante der Pyramide $ABCDS^*$ - etwa AS^* genauso lang ist wie eine Seite der Grundfläche - etwa AB. Es muss also

$\overline{AS^*} = \overline{AB}$

gelten.

Wenn die Bedingung für diese beiden Strecken erfüllt ist, so ist sie für alle Seite der Pyramide erfüllt. Dies liegt daran, dass es sich um eine gerade Pyramide handelt.
Bestimme dazu zunächst die Länge der Strecke AB. Sie enthält keine Parameter, dies bedeutet, wir können den Wert direkt bestimmen. Die Länge l einer Strecke $\overline{XY}$ wird allgemein mithilfe der Abstandsformel bestimmt:

$l = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}$

Daraus folgt

$\overline{AB} = \sqrt{(1-6)^2+(4-4)^2+(0-0)^2} = 5.$

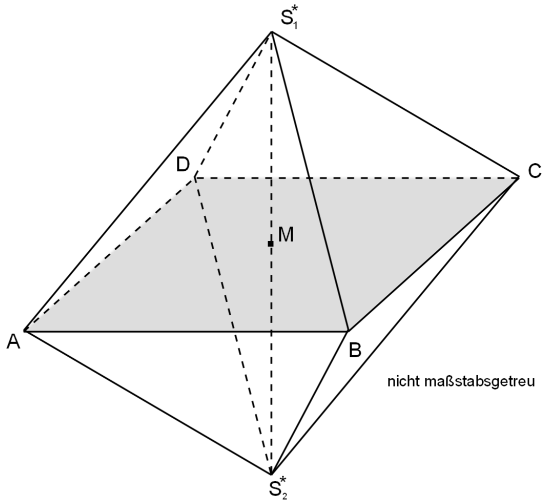
Bestimme nun mit der gleichen Formel die Länge der Strecke AS^* in Abhängigkeit von r:

$$\begin{aligned}
\overline{AS^*} &= \sqrt{(3,5-6)^2+(2+3r-4)^2+(1,5+4r-0)^2} \\
&= \sqrt{(-2,5)^2+\underline{(3r-2)^2}+\underline{(4r+1,5)^2}} && \text{Binomische Formeln!} \\
&= \sqrt{6,25+9r^2-12r+4+16r^2+12r+2,25} \\
&= \sqrt{12,5+25r^2}
\end{aligned}$$

Setze nun deine Ergebnisse für $\overline{AS^*}$ und $\overline{AB}$ gleich und löse nach r auf:

$$\begin{aligned}
\overline{AS^*} &= \overline{AB} \\
\sqrt{12,5+25r^2} &= 5 && \mid\ ^2 \\
12,5+25r^2 &= 25 && \mid\ -12,5 \\
25r^2 &= 12,5 && \mid\ \cdot\tfrac{1}{25} \\
r^2 &= 0,5 && \mid\ \sqrt{} \\
r &= \pm\sqrt{0.5} \\
r_1 &= -\sqrt{0,5} && \text{Probe: } \sqrt{12,5+25\cdot(-\sqrt{0,5})^2} = 5 \\
r_2 &= \sqrt{0,5} && \text{Probe: } \sqrt{12,5+25\cdot\sqrt{0,5}^2} = 5
\end{aligned}$$

Es ergeben sich zwei Werte für r. Es gibt daher zwei verschiedene Möglichkeiten S^* zu wählen. Die Skizze unten zeigt beide mögliche Pyramiden $ABCDS^*$.



Durch Einsetzen von r_1 und r_2 in S^*, erhältst du die Koordinaten der beiden Spitzen:

$$S_1^*\left(3,5 \,|\, 2+3\cdot\sqrt{0,5} \,|\, 1,5+4\cdot\sqrt{0,5}\right) \quad\Longrightarrow\quad S_1^*(3,5 \,|\, 4,1213 \,|\, 4,3284)$$

$$S_2^*\left(3,5 \,|\, 2+3\cdot\left(-\sqrt{0,5}\right) \,|\, 1,5+4\cdot\left(-\sqrt{0,5}\right)\right) \quad\Longrightarrow\quad S_2^*(3,5 \,|\, -1,2132 \,|\, -1,3284)$$

Die zwei möglichen Punkte S^*, für die die Seitenflächen der Pyramide $ABCDS^*$ gleichseitige Dreiecke sind, lauten daher

$$S_1^*(3,5 \,|\, 4,1213 \,|\, 4,3284) \qquad \text{und} \qquad S_2^*(3,5 \,|\, -1,2132 \,|\, -1,3284).$$