a) **▶ Änderungsrate nach 2 Stunden berechnen** (1P)

Die Änderungsrate $f$ der Wassermenge wird laut Aufgabenstellung durch die Funktionsgleichung

$f(x) = 0,2 \cdot x^3 - 2,1 \cdot x^2 + 5 \cdot x$

beschrieben, wobei $x$ die Zeit in Stunden ist und $f(x)$ die Änderung der Wassermenge in Kubikmetern pro Stunde entspricht. Setze daher $x = 2$ in die Funktionsgleichung von $f$ ein und berechne $f(2)$:

$f(2) = 0,2 \cdot 2^3 - 2,1 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 1,6 - 8,4 + 10 = 3,2$

Die Änderungsrate der Wassermenge nach 2 Stunden beträgt damit 3,2 Kubikmeter pro Stunde.

**▶ Zeitabschnitte ermitteln, in denen die Wassermenge ab- bzw. zunimmt** (4P)

In der Aufgabenstellung ist eine Funktion $f$ für die Änderungsrate der Wassermenge im Becken in Abhängigkeit der Zeit gegeben. Wenn die Wassermenge zunimmt, nimmt $f$ folglich positive Werte an - es gilt $f(x) > 0$. Nimmt die Wassermenge ab, ist die Änderungsrate negativ, es gilt $f(x) < 0$.

Dem angegebenen Graphen von $f$ kannst du entnehmen, dass die Funktion $f$ zunächst positive Werte, anschließend negative und schließlich wieder positive Werte annimmt. Bestimme nun diese drei Zeitabschnitte:

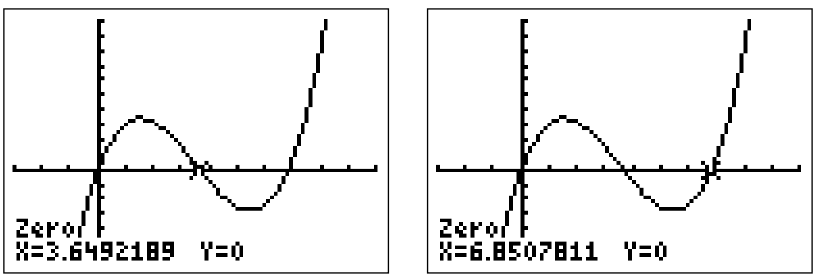
Die Zeitintervalle sind durch die Zeitpunkte begrenzt, zu denen die Änderungsrate gerade den Wert Null annimmt, wo also

$f(x) = 0$

gilt und zusätzlich durch die Grenzen der Definitionsmenge bei $x = 0$ und $x = 8$.

Dem Graphen kannst du entnehmen, dass es zwei solcher Punkte gibt - es sind gerade die Schnittpunkte des Graphen von $f$ mit der $x$-Achse. Du kannst diese mit dem GTR ermitteln:

Gib dazu die Funktionsgleichung von $f$ in den `Y=`-Editor deines GTR ein und lass dir das Schaubild im Intervall $[0,8]$ anzeigen. Die Bildschirmeinstellungen kannst du mit `WINDOW` ändern. Die Schnittstellen mit der $x$-Achse kannst du nun mit der Befehlsfolge `2nd → TRACE (CALC) → Zero` ermitteln.




Der GTR liefert Schnittpunkte des Graphen von $f$ mit der $x$-Achse bei $x_1 \approx 3,65$ und $x_2 \approx 6,85$.

Mit diesen Informationen kannst du nun die Intervalle beschreiben, in denen die Wassermenge zu- bzw. abnimmt:

- $[\mathbf{0; 3,65}]$ $f(x)$ nimmt positive Werte an – die Wassermenge nimmt in diesem Intervall zu.
- $[\mathbf{3,65; 6,85}]$ $f(x)$ nimmt negative Werte an – die Wassermenge nimmt in diesem Zeitraum ab.
- $[\mathbf{6,85; 8}]$ $f(x)$ nimmt hier wieder positive Werte an – die Wassermenge nimmt in diesem Intervall zu.

**▶ $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ ohne GTR berechnen** (4P)

Die Aufgabenstellung verlangt, dass das zu berechnende Integral ohne den Einsatz des GTR ausgeführt wird und dass genügend Zwischenschritte angegeben werden, sodass die Lösung nachvollziehbar ist.

Bilde hierzu nach dem Hauptsatz der Integralrechnung eine Stammfunktion von $f$ mit der Faktor- und Summenregel und setze die Integrationsgrenzen in jeweils einem separatem Schritt ein:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(0,2\cdot x^3 - 2,1\cdot x^2 + 5\cdot x\right)\,\mathrm{d}x &= \left[0,2\cdot\frac{1}{4}x^4 - 2,1\cdot\frac{1}{3}x^3 + 5\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\\ &= \left[0,05x^4 - 0,7x^3 + 2,5x^2\right]_0^2\\ &= \left(0,05\cdot 2^4 - 0,7\cdot 2^3 + 2,5\cdot 2^2\right) - \left(0,05\cdot 0^4 - 0,7\cdot 0^3 + 2,5\cdot 0^2\right)\\ &= (0,8 - 5,6 + 10) - 0\\ &= 5,2\end{aligned}$$

Das Integral hat damit den Wert 5,2.

**▶ Das Integral und seinen Wert im Sachzusammenhang interpretieren** (2P)

Im Zusammenhang interpretiert ist das Integral über die Änderungsrate der Wassermenge gerade die Wassermenge, die innerhalb eines bestimmten Zeitraums insgesamt hinzugekommen oder abgeflossen ist. Kommt Wasser in einem Zeitraum hinzu, ist der Wert des Integrals positiv. Fließt Wasser ab, ist das Ergebnis negativ. Die Grenzen des Integrals geben dabei an, welcher Zeitraum betrachtet wird.

Die Grenzen sind in unserem Fall Null und 2. Wir betrachten also den Zeitraum der ersten beiden Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Daraus folgt: Der Wert 5,2 entspricht den 5,2 Kubikmetern Wasser, die innerhalb der ersten zwei Stunden hinzugekommen sind.

b) **▶ Mithilfe der Graphik begründen, dass das Becken nur zu Beobachtungsbeginn leer ist** (3P)

Der dargestellte Graph in der Abbildung stellt die momentane Änderungsrate $f$ der Wassermenge im Becken dar. Zuvor hast du bestimmt, dass die Menge am Anfang zunimmt, dann abnimmt und dann wieder zunimmt bis zum Ende der Beobachtung. Zudem ist in der Aufgabenstellung angegeben, dass das Becken zu Beginn leer ist.

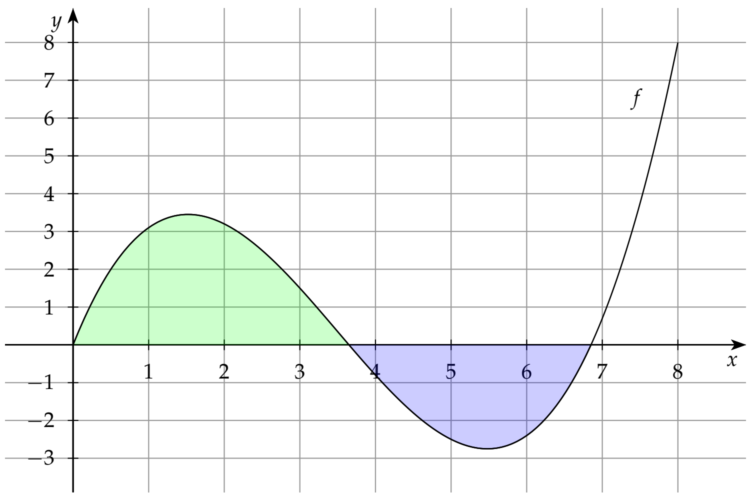
Betrachten wir die Situation:

Im ersten Zeitabschnitt im Intervall $[0; 3,65]$ fließt nur Wasser hinzu. Das Becken kann in diesem Zeitraum also nicht wieder leer werden.

Im zweiten Zeitraum $[3,65; 6,85]$ fließt hingegen ständig Wasser ab. Es ist also möglich, dass das Becken sich wieder völlig leert und zwar genau dann, wenn in diesem Zeitabschnitt mindestens genauso viel Wasser abfließt, wie im ersten Abschnitt zufließt. Vergleiche deshalb die zu- bzw. abgeflossenen Wassermengen in den beiden Intervallen.

Die Wassermengen, die in den jeweiligen Intervallen insgesamt hinzukommen oder abfließen, lassen sich mithilfe des Integrals der Funktion $f$ für die Änderungsrate über diese Intervalle bestimmen. Diese Integrale können als die **orientierten Flächeninhalte unter dem Funktionsgraphen** von $f$ interpretiert werden. Wir können also die beiden Flächeninhalte abschätzen und vergleichen, anstatt die Integrale zu berechnen.

Um die Flächen abzuschätzen, kannst du dich an den eingezeichneten Kästchen orientieren. Zähle ab, wie viele Kästchen etwa in jede der beiden eingeschlossenen Flächen hineinpassen.




Du kannst erkennen: Im ersten Intervall zählt die Fläche zwischen Kurve und $x$-Achse zwischen 7 und 8 Kästchen (grün). Im zweiten Intervall sind es dagegen nur etwa 5 bis 6 Kästchen (blau).

Daraus folgt: Im gesamten zweiten Intervall $[3,65; 6,85]$ fließt weniger Wasser aus dem Becken als im ersten Intervall $[0; 3,65]$ hinzukommt. Zum Zeitpunkt $x = 6,85$ ist das Becken also nicht leer. Nach diesem Moment nimmt die Wassermenge im Becken zudem wieder bis zum Ende der Beobachtung zu. Damit leert sich das Becken nie ganz, es enthält also nur zu Beginn kein Wasser.

**► Den ersten Zeitpunkt bestimmen, zu dem das Becken genau halb voll ist** (5P)

Die in der Aufgabenstellung angegebene Funktion $f$ beschreibt die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Becken. Demnach ist das unbestimmte Integral von $f$ diejenige Funktion, die die im Becken vorhandene Wassermenge $V$ in Abhängigkeit der Zeit beschreibt:

$$V(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Zudem weißt du, dass das Becken am Anfang leer ist. Daher ist $V(0) = 0$. Da das Integral im Funktionsterm von $V$ für $x = 0$ Null wird, muss auch $C$ den Wert Null annehmen, damit die Aussage stimmt. Daraus folgt:

$$V(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Nun soll der Zeitpunkt $x$ bestimmt werden, zu dem das Becken erstmals halb voll ist. Dabei sind die Maße des Beckens in der Aufgabenstellung angegeben. Berechne also im ersten Schritt das Volumen des Beckens und schließe daraus anschließend, wie viel Wasser im Becken sein muss, damit dieses halb voll ist.

Laut Text ist das Becken 3 m lang, 2 m breit und 2 m hoch. Für das Gesamtvolumen des Beckens folgt:

$$V_{max} = (3 \cdot 2 \cdot 2)\,\mathrm{m}^3 = 12\,\mathrm{m}^3$$

Ist das Becken halb voll, so befinden sich damit

$$V_t = \frac{V_{max}}{2} = \frac{12\,\mathrm{m}^3}{2} = 6\,\mathrm{m}^3$$

Wasser im Becken.

Es ist also derjenige Zeitpunkt $t$ gesucht, für den gilt:

$$V(t) = V_t$$

Du kannst die Aufgaben nun in zwei Schritten lösen:

- Bestimme $V(t)$ durch Integration von $f(x)$
- Löse graphisch mit dem GTR die Gleichung $V(t) = V_t$

**1. Schritt: $V(t)$ bestimmen**

Für $V(t)$ gilt:

$$V(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Bilde nun das Integral:

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^t \left(0,2 \cdot x^3 - 2,1 \cdot x^2 + 5 \cdot x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[0,2 \cdot \frac{1}{4}x^4 - 2,1 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2\right]_0^t \\ &= 0,2 \cdot \frac{1}{4}t^4 - 2,1 \cdot \frac{1}{3} \cdot t^3 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \\ &= 0,05 \cdot t^4 - 0,7 \cdot t^3 + 2,5 \cdot t^2 \end{aligned}$$

Integriere mit der Summen- und der Faktorregel:

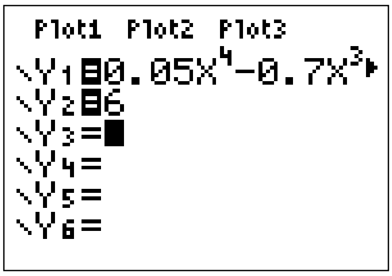
**2. Schritt: $V(t) = V_t$ mit dem GTR lösen**

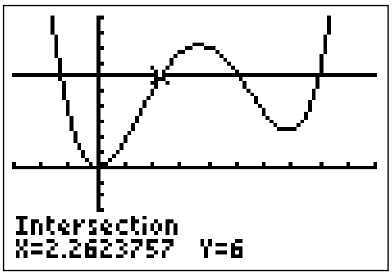
Ist das Becken halb voll, so gilt nach unseren Überlegungen die Gleichung:

$$V(t) = V_t$$

Du kannst nun mithilfe deines GTR herausfinden, wann diese Gleichung zum ersten Mal erfüllt wird.

Gib dazu die Funktionsgleichung von $V$ und ebenso $V_t = 6\,\text{m}^3$ als konstante Funktion in den `Y=`-Editor ein. Lass dir anschließend mit `GRAPH` die beiden Schaubilder einzeichnen. Dort, wo die beiden Graphen sich schneiden, ist die gegebene Gleichung erfüllt. Gefragt ist nun der erste dieser Schnittpunkte im Intervall $[0;8]$. Diesen kannst du mit der Befehlsfolge `2nd → TRACE (CALC) → Intersect` ermitteln.




Der GTR liefert den ersten Schnittpunkt der Graphen bei $t \approx 2,26$.

Damit ist das Becken nach etwa 2,3 Stunden erstmal genau halb voll.

**▶ Die maximale Wassermenge im Becken im Beobachtungszeitraum bestimmen** (4P)

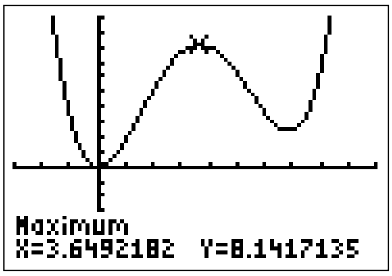
Zuvor hast du die Funktion $V$ bestimmt, die angibt, wie viel Wasser sich im Becken zu einem bestimmten Zeitpunkt $x$ befindet. Finde also das globale Maximum der Funktion $V$ im Intervall $[0;8]$, um die maximale Wassermenge zu ermitteln, die sich im Beobachtungszeitraum im Becken befindet.

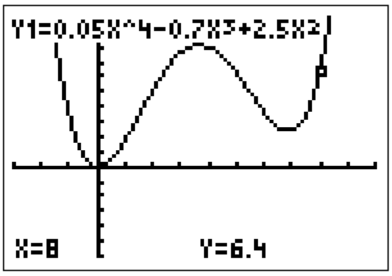
Betrachte dazu

- die lokalen Maxima
- die Randwerte bei $x = 0$ und $x = 8$

Nutze dazu wieder deinen GTR. Lass dir das Schaubild von $V$ im betrachteten Intervall anzeigen. Du kannst dann mit der Befehlsfolge `2nd → TRACE (CALC) → Maximum` das lokale Maximum bestimmen.

Mit `TRACE` kannst du dir zudem die Funktionswerte an den Rändern des Intervalls ausgeben lassen. Bei $x = 0$ wissen wir bereits, dass dort $V(0) = 0$ gilt. Es genügt also, den Funktionswert bei $x = 8$ zu bestimmen.



Der GTR liefert: Bei $x \approx 3,65$ beträgt das Wasservolumen etwa 8,14 Kubikmeter, bei $x = 8$ jedoch nur 6,4 Kubikmeter. Das heißt, das lokale Maximum bei $x \approx 3,65$ stellt auch das globale Maximum im betrachteten Intervall dar.

Die maximale Wassermenge innerhalb des betrachteten Zeitintervalls von 8 Stunden beträgt damit etwa 8,14 Kubikmeter.

c) ▶ **Zeigen, dass $h$ bei $x = 2$ stetig und differenzierbar ist** (5P)

Eine Funktion ist an einer Stelle stetig und differenzierbar, wenn sie dort einen eindeutigen Funktionswert und eine eindeutige Steigung hat. Das heißt, der Graph der Funktion darf an dieser Stelle keinen Sprung und keinen Knick haben.

Bei einer abschnittsweise definierten Funktion ist dies besonders an den Übergangsstellen zwischen den Abschnitten interessant. In unserem Fall ist dies bei $x = 2$. Wenn $h$ an dieser Stelle stetig und differenzierbar ist, dann muss gelten:

1. $f(2) = g(2)$
2. $f'(2) = g'(2)$

**1. Schritt: $f(2) = g(2)$ prüfen**

Prüfe zunächst die erste Bedingung. Berechne dazu die Funktionswerte von $f$ und $g$ bei $x = 2$:

$f(2) = 0,2 \cdot 2^3 - 2,1 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 1,6 - 8,4 + 10 = 3,2$

$g(2) = -2 + 5,2 = 3,2$

Da $f(2)$ und $g(2)$ übereinstimmen, sind die Funktionswerte an der Übergangsstelle sind eindeutig, es gibt also keinen Sprung im Graphen von $h$. Daraus folgt: $h$ ist stetig.

**2. Schritt: $f'(2) = g'(2)$ prüfen**

Prüfe nun die zweite Bedingung. Bilde dazu zunächst die ersten Ableitungen $f'$ und $g'$ von $f$ und $g$ und berechne dann die Werte der Ableitungen bei $x = 2$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0,2 \cdot x^3 - 2,1 \cdot x^2 + 5 \cdot x \\
f'(x) &= 0,2 \cdot 3 \cdot x^2 - 2,1 \cdot 2 \cdot x + 5 \\
&= 0,6 \cdot x^2 - 4,2 \cdot x + 5 \\
f'(2) &= 0,6 \cdot 2^2 - 4,2 \cdot 2 + 5 \\
&= \mathbf{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= -x + 5,2 \\
g'(x) &= -1 \\
g'(2) &= \mathbf{-1}
\end{aligned}$$

Auch die Ableitungswerte der beiden Teilfunktionen stimmen an der Übergangsstelle $x = 2$ überein. Damit ist $h$ stetig und die differenzierbar bei $x = 2$.

▶ **Wassermenge und Höhe des Wasserstandes nach 8 Stunden ermitteln** (6P)

Mit $h$ ist eine neue Funktion für die Änderung der Wassermenge im Becken gegeben. Willst du nun die Wassermenge im Becken nach 8 Stunden berechnen, musst du beachten, dass es sich bei $h$ um eine abschnittsweise definierte Funktion handelt:

Im Intervall $[0;2)$ verhält sich die Wassermenge im Becken nach der Vorschrift von $f$ und im Intervall $[2,8]$ nach der Vorschrift von $g$. Da diese Funktion die Änderungsrate beschreiben, musst du, um auf den Bestand zu schließen, das Integral anwenden. Du kannst also, um die insgesamt im Becken vorhandene Wassermenge zu erhalten,

- zunächst $f$ im Intervall von $x = 0$ bis $x = 2$ integrieren und dann
- das Integral von $g$ von $x = 2$ bis $x = 8$ hinzu addieren.

Dann erhalten wir zunächst die ins leere Becken zugeflossene Menge Wasser in den ersten beiden Stunden und addieren zu diesem Wert dann die Menge Wasser, die in den darauf folgenden 6 Stunden hinzukommt.

Für die Wassermenge $V$ nach 8 Stunden gilt damit:

$$V = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^8 g(x)\,\mathrm{d}x$$

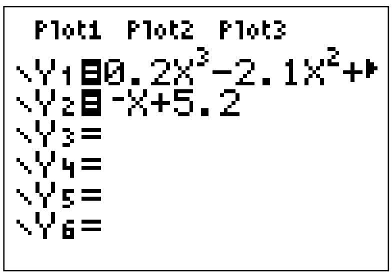
Berechne nun die Integrale und ermittle $V$:

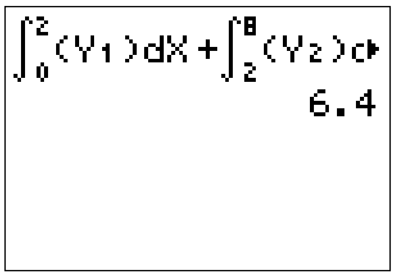
$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \left(0,2\cdot x^3 - 2,1\cdot x^2 + 5\cdot x\right)\,\mathrm{d}x + \int_2^8 (-x+5,2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[0,05\cdot x^4 - 0,7\cdot x^3 + 2,5\cdot x^2\right]_0^2 + \left[-0,5\cdot x^2 + 5,2\cdot x\right]_2^8 \\ &= (0,8 - 5,6 + 10 - 0) + (-32 + 41,6 - (-2 + 10,4)) \\ &= 6,4 \end{aligned}$$

Die Wassermenge im Becken nach 8 Stunden beträgt demnach 6,4 Kubikmeter.

<u>*Alternativ*</u>

Du kannst das Integral auch mithilfe deines GTR berechnen. Gib dazu die Funktionsgleichungen von $f$ und $g$ in den `Y=`-Editor deines GTR ein und verlasse diesen dann mit `2nd → MODE (QUIT)`. Dann kannst du mit der Befehlsfolge `MATH → fnINT` die Integrale einfügen. Die Funktionsgleichungen lassen sich mit `VARS → Y-VARS → Function` aufrufen:

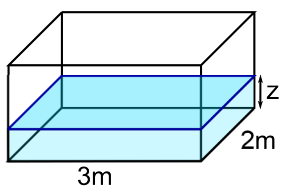



Um die Höhe des Wasserstandes zu bestimmen, erinnerst du dich an die Volumenformel für Quader. Für diese gilt:

$V = \text{Länge} \cdot \text{Breite} \cdot \text{Höhe}$

Das Wasser im Becken nimmt ebenso die Form eines Quaders an. Die Grundfläche dieses Quaders ist dabei gleich der Grundfläche des Beckens, die Länge beträgt 3 m und die Breite 2 m. Die Höhe des Quaders $z$ ist die gesuchte Höhe des Wasserstandes. Für das gesamte Volumen des Wassers nach 8 Stunden gilt damit:



$V = (3 \cdot 2 \cdot z)\,\text{m}^3$

Das Volumen des Wassers nach 8 Stunden hast du zuvor zu 6,4 Kubikmetern bestimmt. Du kannst diesen Wert nun in die Gleichung einsetzen und nach $z$ auflösen:

$$\begin{aligned} 6z &= 6,4 \\ z &\approx 1,07 \end{aligned}$$

Für $z$ ergibt sich eine Höhe von etwa 1,07 m. Das heißt, nach 8 Stunden beträgt die Höhe des Wasserstandes etwa 1,07 m.

d) ▶ **Tangentengleichung für $k = 2,1$ ohne GTR ermitteln** (4P)

Gesucht ist die Funktionsgleichung der Tangente $t_{2,1}$ an den Graphen von $f_{2,1}$ im Punkt $P_{2,1}\,(5 \,|\, f_{2,1}(5))$. Du kannst die Tantentengleichung auf zwei Arten bestimmen: Entweder mithilfe der allgemeinen Tangentengleichung (**Lösungsweg A**) oder unter Verwendung einer allgemeinen Geradengleichung (**Lösungsweg B**).

▶▶ **Lösungsweg A: Tangentengleichung**

Die allgemeine Tangentengleichung für eine Tangente an den Graphen von $f_{2,1}$ in einem Punkt $P\,(x_0 \,|\, f_{2,1}(x_0))$ lautet:

$t(x) = f'_{2,1}(x_0)(x - x_0) + f_{2,1}(x_0)$

$x_0$ ist in unserem Fall gleich 5. Damit folgt für $f_{2,1}(x_0)$:

$f_{2,1}(5) = 0,2 \cdot 5^3 - 2,1 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 = -2,5$

Leite zunächst $f_{2,1}$ ab und berechnen dann den Funktionswert von $f'_{2,1}$ an der Stelle $x = 5$:

$$f_{2,1}(x) = 0,2 \cdot x^3 - 2,1 \cdot x^2 + 5 \cdot x$$

$$f'_{2,1}(x) = 0,6 \cdot x^2 - 4,2 \cdot x + 5$$

$$\begin{aligned} f'_{2,1}(5) &= 0,6 \cdot 5^2 - 4,2 \cdot 5 + 5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Du kannst nun $x_0 = 5$, $f_{2,1}(x_0) = -2,5$ und $f'_{2,1}(x_0) = -1$ in die allgemeine Tangentengleichung einsetzen und das Ergebnis vereinfachen:

$t(x) = f'_{2,1}(x_0)(x - x_0) + f_{2,1}(x_0) = -1 \cdot (x - 5) - 2,5 = -x + 5 - 2,5 = -x + 2,5$

Die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f_{2,1}$ in $P$ lautet damit:

$t(x) = -x + 2,5$

▶▶ **Lösungsweg B: Geradengleichung**

Allgemein hat die Tangente die Form einer Geraden, das heißt:

$t_{2,1}(x) = m \cdot x + c$

Eine Tangente berührt den Graphen der Funktion in einem Punkt, in unserem Fall $P_{2,1}$. Berühren impliziert dabei zweierlei:

- Die Tangente hat bei $x = 5$ den gleichen Funktionswert wie $f_{2,1}$.
- Die Tangente hat bei $x = 5$ die gleiche Steigung wie die Kurve von $f_{2,1}$

Es gelten also die Bedingungen:

- $f_{2,1}(5) = t_{2,1}(5)$
- $f'_{2,1}(5) = t'_{2,1}(5)$

Mithilfe dieser Bedingungen kannst du nun die Parameter $m$ und $c$ der Tangentengleichung bestimmen.

Beginne mit der zweiten Bedingung. Bilde dazu zunächst die Ableitungen $f'_{2,1}$ und $t'_{2,1}$ von $f_{2,1}$ und $t_{2,1}$:

$$f_{2,1}(x) = 0,2 \cdot x^3 - 2,1 \cdot x^2 + 5 \cdot x$$

$$f'_{2,1}(x) = 0,6 \cdot x^2 - 4,2 \cdot x + 5$$

$$t_{2,1}(x) = m \cdot x + c$$
$$t'_{2,1}(x) = m$$

Setze nun die Funktionsterme in die zweite Bedingung ein und löse nach der Steigung $m$ der Tangente auf:

$$\begin{aligned} f'_{2,1}(5) &= t'_{2,1}(5) \\ 0,6 \cdot 5^2 - 4,2 \cdot 5 + 5 &= m \\ \boldsymbol{m} &= \boldsymbol{-1} \end{aligned}$$

Die Steigung der Tangente beträgt damit $m = -1$.

Setze dieses Ergebnis und die Funktionsterme von $f_{2,1}$ und $t_{2,1}$ in die erste Bedingung ein und bestimme den Parameter $c$ der Tangentengleichung:

$$\begin{aligned} f_{2,1}(5) &= t_{2,1}(5) \\ 0,2 \cdot 5^3 - 2,1 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 &= -1 \cdot 5 + c \\ -2,5 &= -5 + c \qquad \mid +5 \\ \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{2,5} \end{aligned}$$

Damit erhältst du für $t_{2,1}$ die Funktionsgleichung:

$$t_{2,1}(x) = -x + 2,5$$

**▶ Untersuchen, ob sich alle Tangenten $t_k$ in einem gemeinsamen Punkt schneiden** (6P)

Wenn sich alle Tangenten $t_k$ in einem Punkt $S$ schneiden, dann schneiden sich bereits zwei Tangenten mit beliebigen $k > 0$ in diesem Punkt. Wir können also den Schnittpunkt zweier beliebiger Tangenten berechnen und anschließend prüfen, ob der Schnittpunkt für alle $t_k$ übereinstimmt.

Gehe wie folgt vor:

- Wähle zwei $k$, etwa $k = 2,1$ und $k = 2$ und berechne den Schnittpunkt $S$ der zugehörigen Tangenten.
- Prüfe durch Einsetzen in $t_k(x)$, ob der Schnittpunkt unabhängig vom Parameter $k$ für alle $t_k$ der gleiche ist.

**1. Schritt: Schnittpunkt zweier beliebiger Tangenten bestimmen**

Wir wollen $k$ mit $k_1 = 2,1$ und $k_2 = 2$ wählen. Die Tangentengleichung erhältst du durch Einsetzen von $k_1$ und $k_2$ in $t_k$ oder aus der vorhergehenden Aufgabe:

$t_{2,1}(x) = -x + 2,5$

$t_2(x) = (20 - 10 \cdot 2) \cdot x + 25 \cdot 2 - 50 = 0$

Im Schnittpunkt der beiden Tangenten stimmen die Funktionswerte der beiden Funktionen überein, es gilt also:

$t_{2,1}(x) = t_2(x)$

Setze nun die zugehörigen Funktionsgleichungen ein und bestimme die Schnittstelle $x$:

$$\begin{aligned} -x + 2,5 &= 0 && \mid -2,5 \\ -x &= -2,5 && \mid \cdot(-1) \\ x &= 2,5 \end{aligned}$$

Du erhältst die Schnittstelle $x = 2,5$ für die beiden beliebig gewählten Funktionen. Da $t_2$ auf der $x$-Achse liegt, ist der Funktionswert der beiden Tangenten an dieser Stelle Null. Der gemeinsame Schnittpunkt hat also die Koordinaten

$S\,(2,5\,|\,0)$

oder aber es gibt keinen gemeinsamen Schnittpunkt. Dies wollen wir im Folgenden nachprüfen.

**2. Schritt: Durch Einsetzen den Schnittpunkt auf Unabhängigkeit von *k* prüfen**

Du kannst nun die Schnittstelle $x = 2,5$ in die allgemeine Funktionsgleichung von $t_k$ einsetzen. Ist der Funktionswert an dieser Stelle für alle $t_k$ gleich, haben alle $t_k$ hier einen Schnittpunkt:

$t_k(2,5) = (20 - 10 \cdot k) \cdot 2,5 + 25 \cdot k - 50 = 50 - 25 \cdot k + 25 \cdot k - 50 = 0$

Der Funktionswert an der Schnittstelle ist unabhängig vom Parameter $k$, das heißt die Graphen aller $t_k$ haben bei $x = 2,5$ einen gemeinsamen Punkt.