1.1 **▶ Prüfen, ob das Dreieck ABC einen rechten Winkel hat** (5P)

Betrachte die Punkte $A(1 \mid 2 \mid 2)$, $B(7 \mid 14 \mid 2)$ und $C(2 \mid 4 \mid -3)$.

Deine Aufgabe ist es, das Dreieck ABC auf einen rechten Winkel zu untersuchen.

Allgemein gilt: Schließen zwei Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ einen rechten Winkel ein, so gilt für das Skalarprodukt dieser:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0}$$

Verwende diesen allgemeinen Zusammenhang zur Überprüfung, ob ein rechter Winkel vorliegt. Beachte dabei, dass du zuerst die Kantenvektoren aufstellen musst, bevor du das Skalarprodukt aus beiden Vektoren berechnen kannst.

Überprüfe also, ob zwischen den drei Kantenvektoren ein rechter Winkel existiert. Berechne dazu:

- $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{AB}$

1. Schritt: Aufstellen der Kantenvektoren

Ein Dreieck hat drei Kantenvektoren. In unserem Fall lauten diese:

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$

2. Schritt: Berechnen der Skalarprodukte

Berechne die Skalarprodukte der Kantenvektoren, um zu überprüfen, ob ein rechter Winkel vorliegt:

- $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 6 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 0 \cdot (-5) = 30$
- $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} = 6 \cdot (-5) + 12 \cdot (-10) + 0 \cdot (-5) = -150$
- $\overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = (-5) \cdot 1 + (-10) \cdot 2 + (-5) \cdot (-5) = 0$

Das liefert dir, dass zwischen den Kantenvektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AB}$ ein rechter Winkel vorliegt. Folglich liegt bei dem Dreieck ABC ein rechtwinkliges Dreieck vor.

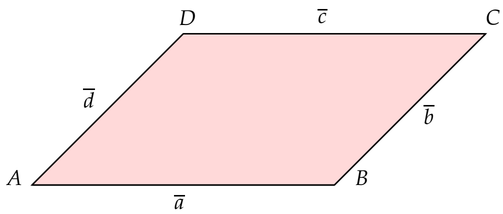
► Bestimmen von D, sodass ein Parallelogramm vorliegt

Betrachte das Dreieck ABC. Dieses Dreieck soll nun um einen Punkt D so erweitert werden, sodass aus dem Dreieck ein Parallelogramm entsteht.

Für ein Parallelogramm müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Je zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel zueinander.
- Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.

Laut den zuvor angeführten Eigenschaften gilt für die Seitenlängen: $\overline{a} = \overline{c}$ und $\overline{b} = \overline{d}$.



Ein möglicher Lösungsweg ist: Bestimme den Vektor $\overrightarrow{BC}$. Addierst du diesen Vektor $\overrightarrow{BC}$ zum Vektor $\overrightarrow{OA}$, so erhältst den Ortsvektor zum gesuchten Punkt D.

1. Schritt: Bestimmen des Kantenvektors $\overrightarrow{BC}$

Den Kantenvektor $\overrightarrow{BC}$ hast du bereits zuvor bestimmt mit:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von D

Für den Ortsvektor von D gilt:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aus dem berechneten Ortsvektor zum Punkt D kannst du die Koordinaten direkt ablesen. Folglich lauten die Koordinaten des Punktes D: $D(-4 \mid -8 \mid -3)$.

1.2 ▶ **Überprüfen, ob die Ebene, die ABC enthält, die x_3-Achse enthält** (4P)

Betrachte wieder das Dreieck ABC und die Ebene, in der es liegt. Überprüfe, ob die x_3-Achse in dieser Ebene enthalten ist.

Eine Geradengleichung der x_3-Achse lautet:

$$\overrightarrow{x_3} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \; t \in \mathbb{R}$$

Jeder Punkt, der auf der x_3-Achse liegt, wird für einen entsprechenden Parameterwert für t mit dieser Geradengleichung erfasst.

Um nun zu überprüfen, ob die x_3-Achse in der Ebene E liegt, kannst du wie folgt vorgehen:

- Stelle die **Ebenengleichung** der Ebene E in Parameterform auf.
- Untersuche, ob die x_3-Achse in dieser Ebene liegt, indem du den **Schnittpunkt** der beiden berechnest. Erhältst du unendlich viele Schnittpunkte, so hast du gezeigt, dass die x_3-Achse in der Ebene liegt. Erhältst du keinen oder nur einen Schnittpunkt, so ist das nicht der Fall.

Einen Ebenengleichung in Parameterform einer Ebene E hat allgemein folgende Form:

$$\boldsymbol{E : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{o} + r \cdot \overrightarrow{u} + s \cdot \overrightarrow{v}; \; r, t} \in \mathbb{R},$$

dabei stellen die Vektoren $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ die Richtungsvektoren und $\overrightarrow{o}$ den Stützvektor dar.

1. Schritt: Ebenengleichung in Parameterform der Ebene E aufstellen

Um eine Ebenengleichung in Parameterform der Ebene E aufzustellen, benötigst du einen Stützvektor, der zur Ebene hin zeigt. Da du weißt, dass das Dreieck ABC in dieser Ebene liegt, kannst du dir einen Punkt aus dem Dreieck wählen, und dessen Ortsvektor als Stützvektor der Ebenengleichung verwenden.
Wir wählen hierbei den Ortsvektor von Punkt A mit

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin benötigst du noch zwei nicht kollineare Richtungsvektoren, die die Ebene E aufspannen. Wir wählen daher die Kantenvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ des Dreiecks ABC

Diese lauten:

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Einsetzen in die oben angeführte allgemeine Form einer Ebenengleichung liefert dir die Ebenengleichung in Parameterform der Ebene E mit:

$$E: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Schnittpunkt der Ebene E mit der x_3-Achse bestimmen

Um zu überprüfen, ob die Ebene E die x_3-Achse enthält, kannst du untersuchen, ob mehr als ein Schnittpunkt zwischen der Ebene E und der x_3-Achse vorliegt. Ist das der Fall, so ist die x_3-Achse in der Ebene E enthalten.

Setze also die Geradengleichung zur x_3-Achse mit der Ebenengleichung der Ebene E gleich und ermittle entsprechende Parameterwerte für r, s und t, sodass alle Gleichungen erfüllt werden, sofern das möglich ist:

$$t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Daraus erhältst du ein lineares Gleichungssystem, mit Hilfe dessen du durch Umformungen die Parameter r, s und t ermitteln kannst:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 1 + r \cdot 6 + s \cdot 1 = 0 & \\ \text{II} & 2 + r \cdot 12 + s \cdot 2 = 0 & \mid :2 \\ \text{III} & 2 + r \cdot 0 + s \cdot (-5) = t & \\ \hline \text{I} & 1 + r \cdot 6 + s \cdot 1 = 0 & \mid -6 \cdot r - 1 \\ \text{IIa} & 1 + r \cdot 6 + s \cdot 1 = 0 & \mid -6 \cdot r - 1 \\ \text{III} & 2 + r \cdot 0 + s \cdot (-5) = t & \end{array}$$

Du kannst erkennen, dass im linearen Gleichungssystem zwei identische Gleichungen vorkommen, was dir aussagt, dass das lineare Gleichungssystem **nicht eindeutig lösbar** ist. Im Folgenden formen wir so um, dass die Parameter von r abhängig sind:

$$\begin{array}{ll} \text{Ia} & -6 \cdot r - 1 = s \\ \text{IIb} & -6 \cdot r - 1 = s \\ \text{III} & 2 + r \cdot 0 + s \cdot (-5) = t \end{array}$$

Einsetzen von s in III liefert dir:

$$\text{III} \quad 2 + r \cdot 0 + (-6 \cdot r - 1) \cdot (-5) = 30 \cdot r + 7 = t$$

Das heißt, dass für jeden beliebigen Wert für r das Gleichungssystem gelöst werden kann. Damit gibt es unendlich viele Lösungen und folglich auch unendlich viele Schnittpunkte der Ebene E und der x_3-Achse.
Du kannst also festhalten, dass die Ebene E die x_3-Achse enthält.

1.3 **► Paralleler Kantenvektor zur Koordinatenebene ausfindig machen** (6P)

Betrachte wieder das Dreieck ABC und zeige, dass eine Seite des Dreiecks ABC parallel zu einer der Koordinatenebenen ist.

Da du zu Beginn nicht weißt, um welche Koordinatenebene es sich handelt, ist es hilfreich, zunächst alle Kantenvektoren des Dreiecks ABC zu betrachten.

Damit eine Seite parallel zu einer Koordinatenebene ist, muss für den jeweilig zugehörigen Vektor eine der folgenden Bedingungen erfüllt sein:

- Parallel zur x_1x_2-Ebene: x_3-Koordinate des Vektors gleich Null.
- Parallel zur x_1x_3-Ebene: x_2-Koordinate des Vektors gleich Null.
- Parallel zur x_2x_3-Ebene: x_1-Koordinate des Vektors gleich Null.

Prüfe also, ob für einen Kantenvektor des Dreiecks ABC eine der drei aufgezählten Bedingungen erfüllt ist.

Die Kantenvektoren des Dreieck ABC hast du bereits ermittelt mit:

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$

Du kannst erkennen, dass der Kantenvektor $\overrightarrow{AB}$ eine x_3-Koordinate von Null besitzt. Das heißt, dass die Punkte A und B auf der gleichen „ Höhe“ im Koordinatensystem liegen.
Der Kantenvektor $\overrightarrow{AB}$, der diese beiden Punkte verbindet, verläuft dann folglich parallel zur x_1x_2-Ebene.

► Zeigen, dass die x_1x_2-Ebene eine Strecke aus ABC ausschneidet

Deine Aufgabe ist es, zu zeigen, dass die x_1x_2-Ebene eine Strecke aus dem Dreieck ABC ausschneidet. Um nachzuweisen, dass das der Fall ist, kannst du zeigen, dass das Dreieck ABC durch die x_1x_2-Ebene verläuft bzw. dass das Dreieck ABC diese schneidet.

Betrachte dazu die Eckpunkte des Dreiecks mit

- $A(1 \mid 2 \mid 2)$,
- $B(7 \mid 14 \mid 2)$,
- $C(2 \mid 4 \mid -3)$.

Versuche anhand der Lage der Punkte A, B und C zu begründen, dass das Dreieck die x_1x_2-Ebene schneiden muss.

Du kannst erkennen, dass die Punkte A und B oberhalb der x_1x_2-Ebene liegen und der Punkt C wegen einer negativen x_3-Koordinate unterhalb der x_1x_2-Ebene. Da die Punkte das Dreieck ABC aufspannen, schneidet somit die x_1x_2-Ebene eine Strecke der Dreiecksfläche aus.

▶ Länge der Strecke berechnen

Im Abschnitt zuvor hast du gezeigt, dass die x_1x_2-Ebene eine Strecke aus der Dreiecksfläche des Dreiecks ABC ausschneidet. Berechne nun die Länge dieser Strecke.

Dabei kannst du wie folgt vorgehen:

- Bestimme die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Kantenvektoren mit der x_1x_2-Ebene.
- Stelle den Vektor $\overrightarrow{S_1S_2}$ auf.
- Berechne den Betrag des Vektors $\overrightarrow{S_1S_2}$, um die Länge der gesuchten Strecke zu erhalten.

Erinnerung: Den Betrag eines Vektors $\overrightarrow{A}$ kannst du wie folgt berechnen:

$$|\overrightarrow{OA}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$

1. Schritt: Bestimmen der Schnittpunkte S_1 und S_2

Im Abschnitt zuvor hast du erkannt, dass die Punkte A und B oberhalb der x_1x_2-Ebene liegen und der Punkt C unterhalb dieser. Folglich schneiden die Kantenvektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ die x_1x_2-Ebene. Stelle also Geradengleichungen für $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ auf, um anschließend den Schnittpunkt berechnen zu können.

Eine Geradengleichung einer Geraden g lautet allgemein:

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{o} + r \cdot \overrightarrow{u};\ r \in \mathbb{R},$$

wobei $\overrightarrow{o}$ den Stützvektor und $\overrightarrow{u}$ den Richtungsvektor darstellt.
Wählen wir jeweils $\overrightarrow{OC}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{AC}$ bzw. $\overrightarrow{BC}$ als Richtungsvektoren, so erhältst du für die beiden Geradengleichungen:

- Gerade $g_{ca}: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$
- Gerade $g_{cb}: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$

Für alle Punkte, die auf der x_1x_2-Ebene liegen, gilt $\boldsymbol{x_3 = 0}$. Verwende diese Bedingung, um einen Parameterwert für r zu finden. Löse also die Gleichung nach dem Parameter r auf. Diesen Wert kannst du anschließend in die Geradengleichungen g_{ca} und g_{cb} einsetzen, um die Koordinaten der Schnittpunkte S_1 und S_2 zu erhalten.

Parameterwert für Gerade g_{ca}

$$\begin{aligned} 0 &= -3 + 5 \cdot r && \mid +3 \\ 3 &= 5 \cdot r && \mid :5 \\ \tfrac{3}{5} &= r \end{aligned}$$

Parameterwert für Gerade g_{cb}

$$\begin{aligned} 0 &= -3 + 5 \cdot r && \mid +3 \\ 3 &= 5 \cdot r && \mid :5 \\ \tfrac{3}{5} &= r \end{aligned}$$

Einsetzen von $r = \frac{3}{5}$ in die Geradengleichung g_{ca} liefert den Schnittpunkt S_1 mit der x_1x_2-Ebene:

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{14}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit hat der Schnittpunkt S_1 die Koordinaten: $\boldsymbol{S_1\left(\frac{7}{5} \mid \frac{14}{5} \mid 0\right)}$.

Einsetzen von $r = \frac{3}{5}$ in die Geradengleichung g_{cb} liefert den Schnittpunkt S_2 mit der x_1x_2-Ebene:

$$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit hat der Schnittpunkt S_2 die Koordinaten: $\boldsymbol{S_2(5 \mid 10 \mid 0)}$.

2. Schritt: Aufstellen des Vektors $\overrightarrow{S_1S_2}$

Da die Strecke, die die x_1x_2-Ebene aus der Dreiecksfläche herausschneidet, gerade der Verbindungslinie der Schnittpunkte S_1 und S_2 entspricht, kannst du zum Berechnen der Länge dieser Strecke zunächst den Vektor $\overrightarrow{S_1S_2}$ aufstellen:

$$\overrightarrow{S_1S_2} = \overrightarrow{OS_2} - \overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{14}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{5} \\ \frac{36}{5} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Schritt: Bestimmen des Betrag des Vektors $\overrightarrow{S_1S_2}$

Um die Länge der gesuchten Strecke zu erhalten, kannst du den Betrag des Vektors $\overrightarrow{S_1S_2}$ berechnen:

$$|\ \overrightarrow{S_1S_2}\ | = \left| \begin{pmatrix} \frac{18}{5} \\ \frac{36}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(\tfrac{18}{5})^2 + (\tfrac{36}{5})^2 + (0)^2} = \sqrt{64,8} \approx 8,05.$$

Die Länge der Strecke beträgt 8,05 LE.