1.1 ▶ **Gleichung von f bestimmen** (18BE)

Trage zunächst die Bedingungen zusammen, welche dir in der Aufgabenstellung gegeben werden:

Der Graph von f verläuft durch die Punkte $P(0 \mid 0)$ und $Q(6 \mid 4)$. Damit ergeben sich zunächst die beiden Bedingungen $f(0) = 0$ und $f(6) = 4$.

Weiterhin soll der Graph von f das Endstück der Landstraße und den Anfang der Brücke **ohne Knick** verbinden. Betrachte also das Endstück der Landstraße, sowie den Anfang der Brücke als Teile von Geraden:

- Das „Endstück der Landstraße“ verläuft durch die Punkte $(-1 \mid -1)$ und $(0 \mid 0)$. Legst du eine Gerade durch diese beiden Punkte, so besitzt diese Gerade die Steigung $m = 1$.
- Der Anfang der Brücke verläuft **parallel zur x-Achse** und liegt damit auf einer Geraden mit der Steigung $m = 0$

Um diese beiden Strecken ohne Knick zu verbinden, muss der Graph von f an die Punkt P und Q mit der jeweiligen **Steigung** anschließen. Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt wird dir immer gegeben durch die **erste Ableitung**. Deshalb gilt $f'(0) = 1$ und $f'(6) = 0$.

Zum Schluss soll der Grad von f möglichst gering sein. Da du insgesamt vier Bedingungen gefunden hast, entscheidest du dich für den Grad 3. Damit hat die Funktionsgleichung von f als ganzrationaler Funktion zunächst allgemein die Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit der Ableitung $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
Trage diese Bedingungen in einer Tabelle zusammen:

I	$f(0) = 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d$	$\Longrightarrow d = 0$
II	$f(6) = 4 = a \cdot 6^3 + b \cdot 6^2 + c \cdot 6 = 216a + 36b + 6c$	
III	$f'(0) = 1 = 3a \cdot 0 + 2b \cdot 0 + c = c$	$\Longrightarrow c = 1$
IV	$f'(6) = 0 = 3a \cdot 6^2 + 2b \cdot 6 + c = 108a + 12b + 1$	

Es folgt zunächst $d = 0$ und $c = 1$. Setze diese Ergebnisse ein in II und IV und erhalte:

II	$4 = 216a + 36b + 6$	$\mid -6$
IV	$0 = 108a + 12b + 1$	$\mid -1$
II	$-2 = 216a + 36b$	
IV	$-1 = 108a + 12b$	| Rechne: II−2·IV
II	$-2 = 216a + 36b$	
IVa	$0 = 12b$	$\Longrightarrow b = 0$

Setze $b = 0$ ein in II und erhalte:

$$-2 = 216a \quad |: 216$$
$$-\frac{1}{108} = a$$

Daraus ergibt sich f mit $f(x) = -\frac{1}{108}x^3 + x$.

1.2 ► Graph von f auf Linkskurve untersuchen

Der Graph einer Funktion ist in einem Intervall $[a;b]$ linksgekrümmt, wenn seine **Steigung** in diesem Intervall **monoton steigend** ist, d.h. wenn $f''(x) > 0$ für $a \leq x \leq b$.

Betrachte also die zweite Ableitung von f:

$$f'(x) = -\frac{3}{108}x^2 + 1 = -\frac{1}{36}x^2 + 1$$
$$f''(x) = -\frac{2}{36}x = -\frac{1}{18}x$$

Gefragt ist, für welche x gilt: $f''(x) = \frac{1}{18}x > 0$. Offensichtlich gilt dies für alle $x < 0$. Das für den Bau relevante Intervall ist allerdings $[0;6]$. Damit liegt im relevanten Intervall **keine** Linkskurve vor.

2. ► Näherungsverfahren beurteilen (14BE)

Berechne die Länge der Straße mit Hilfe der beiden angegebenen Näherungsverfahren.

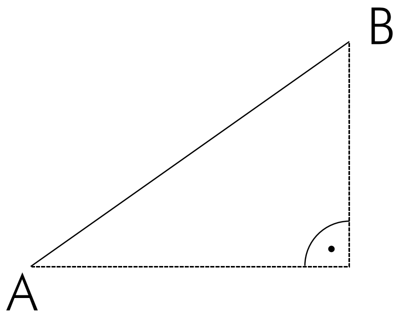
1. Schritt: Näherungsverfahren mit Geradenstücken durchführen

Die Straße wird durch zwei Geradenstücke angenähert. Das erste verbindet die Punkte P und R, das zweite die Punkte R und Q. Bestimme zunächst die vollständigen Koordinaten von R:

$$f(3) = -\frac{1}{108} \cdot 3^3 + 3 = -\frac{27}{108} + 3 = -\frac{1}{4} + 3 = \frac{11}{4} \quad \Longrightarrow \quad R(3 \mid \tfrac{11}{4}).$$

Berechne nun die Längen der Geradenstücke, die zwischen den Punkten verlaufen. Diese Länge entspricht genau dem **Abstand** der Punkte P und Q bzw. Q und R.

Berechne die Länge der Strecke zwischen zwei Punkten mit dem **Satz des Pythagoras**. Die Länge der beiden Katheten des Dreiecks entspricht dabei der **Differenz** der x-Koordinaten bzw. der y-Koordinaten der beiden Punkte.



Somit ergibt sich:

$$\overline{PR}^2 = (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2$$
$$\overline{PR}^2 = (0-3)^2 + \left(0 - \frac{11}{4}\right)^2 = (-3)^2 + \left(-\frac{11}{4}\right)^2 = 9 + \frac{121}{16}$$
$$\overline{PR}^2 = \frac{144+121}{16} = \frac{265}{16} \qquad \mid \sqrt{}$$
$$\overline{PR} \approx 4{,}0697$$

$$\overline{RQ}^2 = (x_R - x_Q)^2 + (y_R - y_Q)^2$$
$$\overline{RQ}^2 = (3-6)^2 + \left(\frac{11}{4} - 4\right)^2 = (-3)^2 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = 9 + \frac{25}{16}$$
$$\overline{RQ}^2 = \frac{144+25}{16} = \frac{169}{16} \qquad \mid \sqrt{\ }$$
$$\overline{RQ} = \frac{13}{4} = 3{,}25$$

Die angenäherte Länge entspricht der Summe dieser beiden Teilstücke. Somit ergibt dieses Näherungsverfahren eine Streckenlänge von $L = 4{,}0697 + 3{,}25 = 7{,}3179$.

2. Schritt: Näherungsverfahren mit der Keplerschen Fassregel durchführen

Mit Hilfe der Keplerschen Fassregel soll das Integral $L = \int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$ berechnet werden.

Als Grenzen dienen in unserem Fall die linke und rechte Begrenzung der zu bauenden Straße, d.h. $x = 0$ und $x = 6$. Vereinfache zunächst den Funktionsterm von $g(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$:

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+\left(-\frac{1}{36}x^2+1\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{1296}x^4 - \frac{1}{18}x^2 + 1}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{1296}x^4 - \frac{1}{18}x^2 + 2}$$

Berechne nun das Integral L mit der Keplerschen Fassregel:

$$L = \int\limits_0^6 \left(\sqrt{\frac{1}{1296}x^4 - \frac{1}{18}x^2 + 2}\right)\mathrm{d}x$$
$$\approx \frac{1}{6}\cdot(6-0)\cdot\left[\left(\sqrt{\frac{1}{1296}\cdot 0 - \frac{1}{18}\cdot 0 + 2}\right) + 4\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{1296}\cdot 3^4 - \frac{1}{18}\cdot 3^2 + 2}\right) + \left(\sqrt{\frac{1}{1296}\cdot 6^4 - \frac{1}{18}\cdot 6^2 + 2}\right)\right]$$
$$\approx \left[\sqrt{2} + 4\cdot\left(\sqrt{0{,}0625 - 0{,}5 + 2}\right) + \left(\sqrt{1-2+2}\right)\right]$$
$$\approx \sqrt{2} + 4\cdot 1{,}25 + 1 = 6 + \sqrt{2} \approx 7{,}4142$$

Damit gibt die zweite Methode mit der Keplerschen Fassregel einen Wert an, der näher am Computerergebenis $L \approx 7{,}38$ liegt.

3. ▶ **Gleichungen erklären** (8BE)

Betrachte zunächst die Skizze in Material 1 bzw. 2: Vor dem Bau der Straße gehört Landwirt A eine Fläche von 6 FE. Durch die Straße wird diese Fläche zerteilt. Das Feld soll nun so umverteilt werden, dass der Besitz von Landwirt A vollständig auf einer Seite der Straße liegt.

1. Schritt: Gleichung (1)

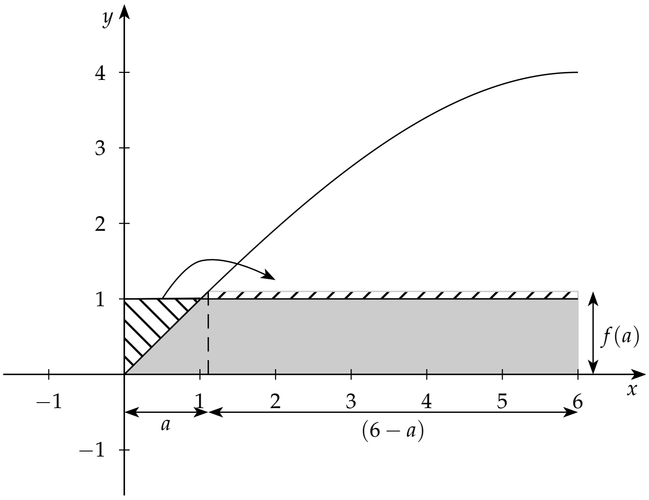
In Gleichung (1) wird der Inhalt einer Fläche berechnet. Diese setzt sich aus zwei Teilflächen zusammen:

Mit $\int\limits_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ wird der Inhalt der Fläche berechnet, die zwischen 0 und a vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.

Mit $(6-a)\cdot f(a)$ wird der Inhalt eines Rechtecks ermittelt. Es ist $(6-a)$ LE breit und **schließt somit direkt** an die Fläche unter dem Graphen von f an.

Die Summe der beiden Teilflächen soll genau 6 ergeben: Somit besitzt Landwirt A nach der Umverteilung ebenso viel Land wie vor der Umverteilung.

Als Ergebnis ergibt sich $a \approx 1{,}11$. Nach der Umverteilung besitzt Landwirt A also eine Landfläche in dieser Form:



2. Schritt: Gleichung (2)

In dieser Gleichung wird das gleiche Ziel verfolgt: die 6 LE Landfläche von Landwirt A sollen vollständig auf einer Seite der Straße liegen. Im Gegensatz zu oben wird in dieser Gleichung allerdings der Inhalt einer **Schnittfläche** berechnet.

Sie wird von der Geraden $f(a)$, welche eine **Parallele zur x-Achse** ist, und dem Graphen von f eingeschlossen. Diese Fläche liegt also auf der **linken** Seite der Straße. Als Lösung ergibt sich $a \approx 3{,}9$. Die zugehörige Umverteilung der Fläche sieht also so aus: