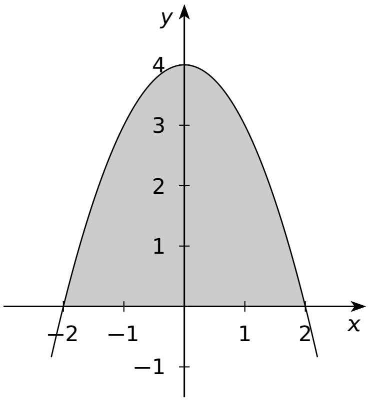
Teil 1

1. ▸ **Skizze des Graphen der Funktion f** (5BE)

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 4 - x^2$ ist eine umgedrehte Normalparabel, die um 4 Einheiten nach oben entlang der y-Achse verschoben ist. Die Nullstellen sind $x = \pm 2$.



▸ **Berechnung des gesuchten Flächeninhalts**

Das gesuchte Flächenstück wird von dem Graphen G_f und der x-Achse zwischen den Nullstellen $x = -2$ und $x = 2$ begrenzt. Für den Inhalt gilt also:

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3\right) - \left(4 \cdot (-2) - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3\right) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{48}{3} - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \text{ FE.}$$

2. ▸ **Angabe der maximalen Definitionsmenge der Funktion f** (4BE)

Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist für alle $x \geq 0$ definiert, ebenso unsere gegebene Funktion $f\colon x \mapsto 3\sqrt{x}$. Maximale Definitionsmenge ist also der $\mathbb{R}_0^+$ (bzw. $[0; +\infty[$).

▸ **Bestimmung der gesuchten Stammfunktion**

Für alle unbestimmten Stammfunktionen von f gilt zunächst:

$$F(x) = \int 3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int 3 \cdot x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 2 \cdot x^{\frac{3}{2}} + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Wenn die gesuchte Stammfunktion nun den Punkt $(1\,|\,4)$ enthalten soll, muss $F(1) = 4$ sein:

$$F(1) = 2 \cdot 1^{\frac{3}{2}} + C = 4 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 1 + C = 4 \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Die gesuchte Stammfunktion hat also den Term $F(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 2$.

3. $f\colon x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

a) ▸ **Angabe der Nullstellen von f** (3BE)

Der Bruchterm $\dfrac{\sin x}{x^2}$ ist genau dann gleich Null, wenn sein **Zähler** $\sin x$ gleich Null ist.

Die Sinusfunktion hat bei $x = 0$ eine Nullstelle, alle weiteren sind um jeweils π voneinander entfernt. Die Funktion f ist allerdings bei $x = 0$ nicht definiert, dieser Wert muss daher ausgeschlossen werden. Alle Nullstellen von f liegen also bei $x = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

b) ▸ **Ermittlung des Symmetrieverhaltens des Graphen von f** (3BE)

Wir bilden $f(-x)$, formen um und vergleichen mit $f(x)$. Es folgt

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2} = \frac{-\sin x}{x^2} = -\frac{\sin x}{x^2} = -f(x),$$

da $\sin(-x) = -\sin x$ gilt, denn die Sinusfunktion ist ungerade. Der Graph von f ist somit punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

▶ **Angabe des Grenzwertes von f für $x \to +\infty$**

Der Zähler $\sin x$ des Bruchterms schwankt periodisch zwischen den Werten 1 und -1, der Nenner x^2 wächst für $x \to \infty$ jedoch über alle Grenzen. Daher gilt

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\sin x}^{\in[-1;1]}}{\underbrace{x^2}_{\to\infty}} = 0.$$

c) ▶ **Bestimmung des Ableitungsterms von f** (2BE)

Wir leiten die Funktion f nach der Quotientenregel ab. Dabei gilt $(\sin x)' = \cos x$.

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot x^2 - \sin x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^2 \cdot \cos x - 2x \cdot \sin x}{x^4}.$$

4. ▶ **Angabe eines Funktionsterms mit Polstelle $x = -1$ ohne VZW und Asymptote $y = 2$** (3BE)

Damit $x = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel ist, muss sie eine **doppelte Nullstelle des Nenners** in der Funktionsgleichung von f sein. Das einfachste Beispiel hierzu wäre

$$f^*(x) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Diese Funktion f^* strebt allerdings gegen Null für $x \to \pm\infty$. Damit sie gegen 2 strebt (und ihr Graph damit die waagrechte Asymptote $y = 2$ besitzt), muss nur noch 2 hinzuaddiert werden und wir haben einen möglichen Funktionsterm gefunden:

$$f(x) = 2 + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Teil 2

1. $f\colon x \mapsto 6 \cdot e^{-0,5x} + x;\quad D_f = \mathbb{R}$

a) ▶ **Bestimmung von Art und Lage des Extrempunkts von G_f** (10BE)

Der Extrempunkt von G_f wird mithilfe der ersten beiden Ableitungen von f bestimmt. Für diese gilt nach der Kettenregel:

$$f'(x) = 6e^{-0,5x} \cdot (-0,5) + 1 = -3e^{-0,5x} + 1;$$

$$f''(x) = -3e^{-0,5x} \cdot (-0,5) = 1,5e^{-0,5x}.$$

Aus der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ für Extremstellen ergibt sich:

$$f'(x) = -3e^{-0,5x} + 1 = 0$$

$$e^{-0,5x} = \frac{1}{3} \qquad | \ln(\,)$$

$$-0,5x = \ln\frac{1}{3}$$

$$x = \frac{\ln\frac{1}{3}}{-0,5} = \frac{\ln 3^{-1}}{-0,5} = \frac{-\ln 3}{-0,5} = 2\cdot\ln 3.$$

Mit der hinreichenden Bedingung $f''(x) \neq 0$ erhalten wir weiter:

$$f''(2\cdot\ln 3) = 1,5\cdot e^{-0,5\cdot 2\cdot\ln 3} = 1,5\cdot e^{-\ln 3} = 1,5\cdot e^{\ln\frac{1}{3}} = 1,5\cdot\frac{1}{3} > 0,$$

also liegt bei $x = 2\cdot\ln 3$ ein **Minimum** von f vor. Der zugehörige Punkt $T(2\cdot\ln 3\,|\,f(2\cdot\ln 3))$ ist ein Tiefpunkt von G_f. Mit

$$f(2\cdot\ln 3) = 6\cdot e^{-0,5\cdot 2\cdot\ln 3} + 2\cdot\ln 3 = 6\cdot e^{\ln\frac{1}{3}} + 2\ln 3 = 6\cdot\frac{1}{3} + 2\ln 3 = 2 + 2\ln 3$$

lauten seine vollständigen Koordinaten $T(2\ln 3\,|\,2 + 2\ln 3)$.

▸ **Untersuchung des Monotonieverhaltens von G_f**

Es hat sich gelohnt, zuerst den Tiefpunkt von G_f zu berechnen, denn: Da G_f nur einen Tiefpunkt hat und f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, muss G_f links vom Tiefpunkt T monoton fallen und rechts von T monoton steigen.

G_f ist also monoton fallend in $]-\infty; 2\ln 3]$ und monoton steigend in $[2\ln 3; +\infty[$.

▸ **Untersuchung des Krümmungsverhaltens von G_f**

Das Krümmungsverhalten hängt vom Vorzeichen der zweiten Ableitung von f ab. Es gilt

$$f''(x) = 1,5\cdot e^{-0,5x} > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

da die e-Funktion immer positiv ist. Daher ist der Graph G_f auf dem gesamten Definitionsbereich linksgekrümmt (konvex).

b) ▸ **Angabe des Verhaltens von f für $x \to -\infty$** (3BE)

Für $x \to -\infty$ gilt $e^{-0,5x} \to +\infty$. Da die e-Funktion $x \mapsto e^{-0,5x}$ das Verhalten von f im Vergleich zur linearen Funktion $x \mapsto x$ dominiert, gilt daher auch insgesamt:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\underbrace{6e^{-0,5x}}_{\to\infty} + \underbrace{x}_{\to-\infty}\right] = +\infty + (-\infty) = +\infty.$$

▸ **Erklärung der schrägen Asymptote für $x \to +\infty$**

Die schräge Asymptote ergibt sich ebenfalls aus dem Verhalten der e-Funktion. Für $x \to +\infty$ gilt nämlich $e^{-0,5x} \to 0$. Für die Funktion f gilt daher für große x-Werte:

$$f(x) = 6\cdot\underbrace{e^{-0,5x}}_{\approx 0} + x \approx x.$$

Somit ist die Asymptote $y = x$ schräge Asymptote von G_f für $x \to +\infty$.

c) ▸ **Bestimmung der Tangentengleichung im Punkt $(0\,|\,6)$** (6BE)

Als Gerade hat die Tangente t in $(0\,|\,6)$ die allgemeine Gleichung $y = mx + c$, wobei m die Steigung der Tangente ist.

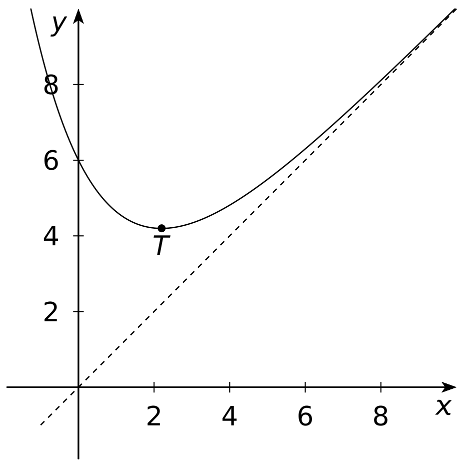
Die Steigung m entspricht dem Wert der ersten Ableitung von f an der Stelle $x = 0$:

$m = f'(0) = -3 \cdot e^0 + 1 = -3 + 1 = -2.$

Als vorläufige Tangentengleichung ergibt sich so $y = -2x + c$. Der y-Achsenabschnitt c ergibt sich aus der Bedingung, dass der Punkt $(0|6)$ auf der Tangente liegen muss. Einsetzen in die Gleichung ergibt $6 = -2 \cdot 0 + c$, also $c = 6$. Die Gleichung der Tangente lautet damit t: $y = -2x + 6$.

▸ **Skizze des Graphen G_f**

Aus den vorherigen Teilaufgaben ergeben sich folgende Merkmale: Der Graph ist linksgekrümmt, hat näherungsweise den Tiefpunkt $T(2{,}2|4{,}2)$, enthält den Tangentenpunkt $(0|6)$ und besitzt für $x \to +\infty$ die schräge Asymptote $y = x$.



2. h: $x \mapsto 6 \cdot e^{-0{,}5x} + 1{,}5$; $D_h = \mathbb{R}$

a) ▸ **Beschreibung, wie der Graph aus dem der natürlichen Exponentialfunktion hervorgeht** (4BE)

Der Graph kann in 4 Schritten aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto e^x$ gebildet werden:

- Spiegelung an der y-Achse (Übergang $e^x \to e^{-x}$);
- Streckung in x-Richtung um 2 Einheiten (Übergang $e^{-x} \to e^{-0{,}5x}$);
- Streckung in y-Richtung um 6 Einheiten (Übergang $e^{-0{,}5x} \to 6e^{-0{,}5x}$);
- Verschiebung um $(+1{,}5)$ Einheiten in y-Richtung (Übergang $6e^{-0{,}5x} \to 6e^{-0{,}5x} + 1{,}5$).

So ergibt sich letztlich der Graph G_h von h: $x \mapsto 6 \cdot e^{-0{,}5x} + 1{,}5$.

b) ▸ **Bedeutung des Monotonieverhaltens im Sachzusammenhang** (3BE)

Das Monotonieverhalten von G_h ergibt sich aus der ersten Ableitung von h. Für diese gilt nach der Kettenregel:

$$f'(x) = 6 \cdot e^{-0{,}5x} \cdot (-0{,}5) = \underbrace{-3}_{<0} \cdot \underbrace{e^{-0{,}5x}}_{>0} < 0,$$

denn die e-Funktion selbst ist immer positiv. G_h ist somit streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$.

Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass die Schadstoffausstoß**rate** (nicht der Schadstoffausstoß selbst!), die durch die Funktion h beschrieben wird, langfristig immer geringer wird.

▶ Bedeutung des Grenzwertes für $x \to +\infty$ im Sachzusammenhang

Für $x \to +\infty$ geht $e^{-x} \to 0$. Für $h(x)$ bedeutet dies:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[6 \cdot e^{-0,5x} + 1,5\right] = 1,5.$$

Die Schadstoffausstoßrate $h(x)$ beträgt langfristig also 1,5 Milligramm pro Minute.

c) **▶ Bestimmung und Interpretation des Flächeninhalts** (6BE)

Das Flächenstück entspricht der Fläche unterhalb des Graphen G_h zwischen der x-Achse, der y-Achse ($x = 0$) und der Geraden $x = 5$. Für seinen Inhalt gilt also:

$$A = \int_0^5 (6 \cdot e^{-0,5x} + 1,5)\,dx = \left[6 \cdot \frac{e^{-0,5x}}{-0,5} + 1,5x\right]_0^5 = \left[-12e^{-0,5x} + 1,5x\right]_0^5$$

$$= (-12e^{-2,5} + 7,5) - (-12e^0 + 0) = -12e^{-2,5} + 7,5 + 12 + 0 = 19,5 - 12e^{-2,5}$$

$$\approx 18,5.$$

Da $h(x)$ die momentane Schadstoffausstoß**rate** beschreibt, ist das Integral ein Maß für den gesamten Schadstoffausstoß, hier in der Zeit von $x = 0$ Minuten (Einschalten der Maschine) bis $x = 5$ Minuten. In dieser Zeit hat die Maschine also etwa 18,5 Milligramm Schadstoffe ausgestoßen.

3. $f_a\colon x \mapsto 6 \cdot e^{-0,5x} - a \cdot x;\quad D_{f_a} = \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R}^+$

a) **▶ Nachweis, dass alle Graphen die *y*-Achse im selben Punkt schneiden** (5BE)

Der Schnittpunkt mit der y-Achse liegt bei $x = 0$. Für den Funktionswert gilt hier:

$$f_a(0) = 6 \cdot e^0 - a \cdot 0 = 6 \cdot 1 - 0 = 6.$$

Unabhängig von a schneiden alle Graphen die y-Achse im Punkt $S(0\,|\,6)$.

▶ Nachweis, dass alle Graphen streng monoton fallend sind

Das Monotonieverhalten der Graphen von f_a wird mithilfe der ersten Ableitung bestimmt:

$$f_a'(x) = 6 \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5) - a = \underbrace{-3 \cdot e^{-0,5x}}_{<0} \underbrace{-a}_{<0} < 0.$$

Die Graphen G_a sind also wegen $a > 0$ für alle a-Werte streng monoton fallend.

▶ Nachweis des Grenzwertes

Für $x \to +\infty$ gilt $e^{-x} \to 0$. Für das Verhalten der Funktionen f_a gilt also:

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\underbrace{6e^{-0,5x}_{\to 0}}_{} - \underbrace{ax}_{\to+\infty}\right] = -\infty.$$

Damit ist der Grenzwert nachgewiesen.

b) **▶ Bestimmung eines Näherungswertes in Abhängigkeit von *a*** (3BE)

Mit dem gegebenen Startwert $x_0 = 0$ gibt die allgemeine Iterationsformel für das Newton-Verfahren den gesuchten Näherungswert x_1 für die Nullstelle. Die erste Ableitung von f_a kennen wir dabei noch aus Teilaufgabe 3a:

$$x_1 = x_0 - \frac{f_a(x_0)}{f_a'(x_0)} = 0 - \frac{6 \cdot e^0 - a \cdot 0}{-3 \cdot e^0 - a} = -\frac{6}{-3 - a} = \frac{6}{a + 3}.$$