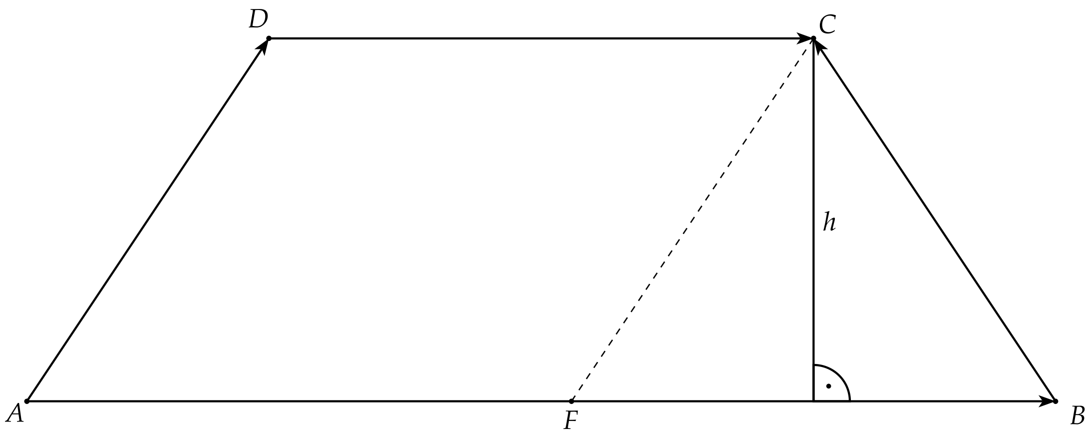
a) **Nachweis der Gleichschenkligkeit des Trapezes** $ABCD$ (7BE)

Skizze:




Das Trapez $ABCD$ ist gleichschenklig, wenn zwei Seiten parallel zueinander sind und die beiden anderen, nicht parallelen Seiten (entspricht den "Schenkeln") gleich lang sind.

Für die beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-5 \\ 6-(-1) \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2+7^2+0^2} = \sqrt{7^2} = 7$$

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ 5-0 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{DC}\right| = \sqrt{0^2+5^2+0^2} = \sqrt{5^2} = 5$$

$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ sind parallel, wenn die Vektoren eine Linearkombination voneinander sind, wenn also $\overrightarrow{AB}$ ein Vielfaches von $\overrightarrow{DC}$ ist:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = r \cdot \left|\overrightarrow{DC}\right| \qquad (r \in \mathbb{R})$$

$$7 = r \cdot 5$$

$$r = \frac{7}{5}$$

Die beiden Vektoren sind Vielfache voneinander, also sind die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ parallel zueinander (vgl. Skizze).

Für die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ gilt:

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4-5 \\ 0-(-1) \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-1)^2+1^2+3^2} = \sqrt{11}$$


Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4-5 \\ 5-6 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

$\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BC}$ sind ebenfalls parallel zueinander, wenn sie eine Linearkombination voneinander sind:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -1 = s \cdot (-1) \\ \text{II} & 1 = s \cdot (-1) \\ \text{III} & 3 = s \cdot 3 \end{array}$$

Aus (I) folgt $s = 1$, aus (II) $s = -1$ und aus (III) $s = 1$. Das LGS ist somit nicht lösbar und die beiden Vektoren zwar gleich lang, jedoch nicht parallel zueinander. Die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ stellen somit die Schenkel des Trapezes dar.

Da nun $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ und $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$ gilt, ist das Trapez $ABCD$ somit gleichschenklig.

**Flächeninhalt des Trapezes**

Für den Flächeninhalt eines Trapezes mit der Grundseite $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, der Oberseite $\left|\overrightarrow{DC}\right|$ und der Höhe $h$ gilt allgemein:

$$A = \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{DC}\right|\right) \cdot h$$

Für die Höhe $h$ gilt mithilfe des Satzes des Pythagoras (vgl. Skizze):

$$h^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 - \left(\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| - \left|\overrightarrow{DC}\right|}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \left(\sqrt{11}\right)^2 - \left(\frac{7-5}{2}\right)^2$$

$$h = \sqrt{11-1}$$

$$h = \sqrt{10}$$

Für den Flächeninhalt gilt folglich

$$A = \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{DC}\right|\right) \cdot h$$

$$A = \frac{1}{2}(7+5) \cdot \sqrt{10}$$

$$A = 6\sqrt{10} \quad (\approx 18{,}975)$$

Das Trapez hat somit einen Flächeninhalt von $6\sqrt{10}$ FE.

**Koordinaten des Punktes $F$**

Für den Ortsvektor $\overrightarrow{OF}$ von $F$ gilt mithilfe des gegebenen Punktes $A$:

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF}$$

Mithilfe der Skizze des Trapezes ist ersichtlich, dass $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DC}$ gelten muss, wenn das entstehende Viereck $AFCD$ ein Parallelogramm sein soll. Somit gilt:

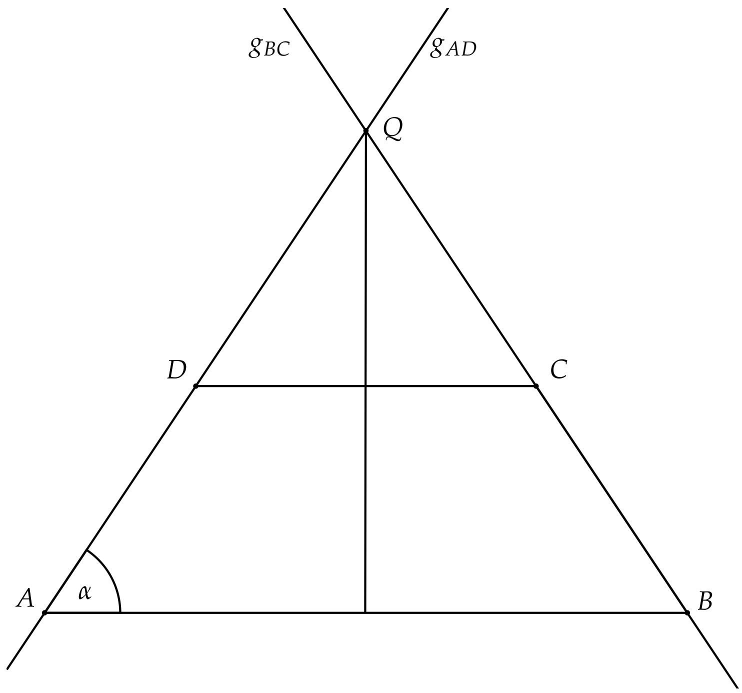
$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $F$ hat folglich die Koordinaten $F(5|4|0)$.


Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

b) **Ermittlung der Koordinaten vom Punkt $Q$** (4BE)

Skizze:




Der Punkt $Q$ ist der Schnittpunkt der beiden Geraden $g_{AD}$ und $g_{BC}$. Das entstehende Dreieck $ABQ$ ist gleichschenklig, da das einbeschriebene Trapez $ABCD$ ebenfalls gleichschenklig ist. Für $g_{AD}$ gilt: Der Stützvektor ist der Vektor $\overrightarrow{OA}$ vom Ursprung zum Punkt $A$ und der Richtungsvektor der Vektor $\overrightarrow{AD}$ (siehe Teilaufgabe a)). Folglich gilt für $g_{AD}$:

$$g_{AD}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Analog gilt für die Gerade $g_{BC}$ mit dem Stützvektor $\overrightarrow{OB}$ und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{BC}$:

$$g_{BC}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

Der Schnittpunkt wird mit einem geeigneten GTR-Programm mithilfe des Ansatzes $g_{AB} = g_{BC}$ (allgemeiner Schnittpunktansatz für zwei Geraden) berechnet. Daraus folgt:

$Q(\frac{3}{2}|\frac{5}{2}|\frac{21}{2})$


Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

**Bestimmung des Basiswinkels $\alpha$**

Für den Basiswinkel $\alpha$ zwischen den beiden Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}}{7\cdot\sqrt{11}}$$

$$\cos\alpha = \frac{0\cdot(-1)+7\cdot 1+3\cdot 3}{7\cdot\sqrt{11}}$$

$$\cos\alpha = \frac{7}{7\cdot\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$\cos\alpha \approx 0,302$$

$$\alpha \approx 72,5^\circ$$

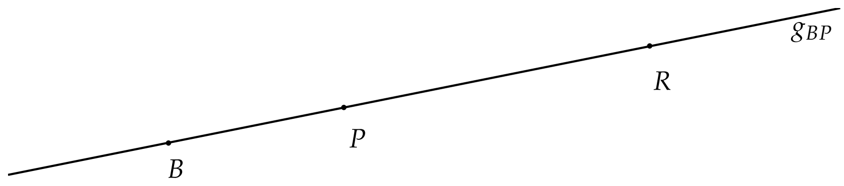
Hinweis: Der Basiswinkel kann auch mit einem geeigneten GTR-Programm berechnet werden.

Der Basiswinkel $\alpha$ hat eine Größe von ca. 72,5°.


Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

c) **Analyse des Lösungswegs** (4BE)

Skizze:




**1. Schritt**

Der erste Schritt ist korrekt, da der Vektor $\overrightarrow{BR}$ ein Vielfaches vom Vektor $\overrightarrow{BP}$ ist. Für $\overrightarrow{BP}$ gilt:

$$\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -5-5 \\ 7-6 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**2. Schritt**

Der Betrag von $\overrightarrow{BP}$ ist $\left|\overrightarrow{BP}\right| = \sqrt{(-10)^2+1^2+0^2} = \sqrt{101}$.

Der Einheitsvektor von $\overrightarrow{BP}$ ist derjenige Vektor $\overrightarrow{BP_0}$, der dieselbe Richtung wie $\overrightarrow{BP}$ und den Betrag 1 hat. Man erhält ihn durch Division eines Vektor durch seinen Betrag, also

$$\overrightarrow{BP_0} = \frac{1}{\sqrt{101}} \cdot \overrightarrow{BP} = \frac{1}{\sqrt{101}} \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der zweite Schritt ist somit ebenfalls korrekt.

**3. Schritt**

Durch Multiplikation des Vektors $\overrightarrow{BP_0}$ mit dem Faktor $2\sqrt{101}$ erhält man den Vektor $\overrightarrow{BR}$. Der Abstand der beiden Punkte $B$ und $R$ ist somit gleich dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{BR}$.
Der dritte Schritt ist somit ebenfalls korrekt.

**4. Schritt**

Dieser Schritt ist falsch, da der erhaltene Vektor nur den Vektor $\overrightarrow{BR}$ darstellt, nicht jedoch den gesuchten Ortsvektor $\overrightarrow{OR}$. Dieser wird nämlich über die Addition **oder** Subtraktion des Ortsvektors $\overrightarrow{OB}$ von $B$ mit dem Vektor $\overrightarrow{BR}$ von $B$ zu $R$ berechnet. Es ist sowohl Addition als auch Subtraktion möglich, da $R$ auf beiden Seiten von $B$ auf der Geraden $g_{BP}$ liegen kann:

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BR}$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} + 2\sqrt{101} \cdot \overrightarrow{BP_0}$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\sqrt{101} \cdot \frac{1}{\sqrt{101}} \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$


Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+(-20) \\ 6+2 \\ 0+0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} -15 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt der erste mögliche Punkt $R_1(-15|8|0)$.

Für den zweiten Punkt $R_2$ gilt:

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BR}$$
$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} - 2\sqrt{101} \cdot \overrightarrow{BP_0}$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\sqrt{101} \cdot \frac{1}{\sqrt{101}} \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -20 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 25 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt der zweite mögliche Punkt $R_2(25|4|0)$.


Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.