2.1.1 ► **Prüfung, ob f monoton steigend ist** (5P)

Eine Funktion f ist monoton steigend, wenn ihre Steigung immer größer oder gleich Null ist. In der Abbildung ist das Schaubild der Ableitung von f abgebildet. Die Ableitung definiert die Steigung in einem Punkt der Kurve. An der Ausdehnung des Schaubildes entlang der y-Achse kann man also erkennen, ob die Steigung immer größer oder gleich Null ist.

► **Prüfung, ob das Schaubild von f symmetrisch zur y-Achse ist**

Das Schaubild einer Funktion ist dann symmetrisch zur y-Achse, wenn ein Punkt rechts davon auf der Kurve in einem bestimmten Abstand die gleiche y-Koordinate hat, wie ein Punkt im gleichen Abstand links von der Kurve. Es muss also gelten:

$$f(x) = f(-x)$$

► **Prüfung, ob der Graph von f in P dieselbe Steigung hat wie die erste Winkelhalbierende**

Die erste Winkelhalbierende ist die Gerade durch den Ursprung, die den Winkel, den die Koordinatenachsen im ersten Quadranten einschließen, halbiert. Ihre Gleichung lautet:

$$y = x$$

Die Steigung dieser Geraden ist genau 1.

2.1.2 ► **Funktionsterm von f'** (5P)

Das Schaubild von f' ist das einer trigonometrischen Funktion. Da das Schaubild auf der y-Achse ein Maximum aufweist, ist es sinnvoll, f' als eine Cosinus-Funktion zu definieren. Allgemein lautet die Gleichung von f' dann:

$$f'(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d,$$

a entspricht der Amplitude des Schaubildes. b definiert die Periode p der Funktion über die Formel

$$p = \frac{2\pi}{b}.$$

c definiert die Verschiebung des Schaubildes entlang der x-Achse und d die Verschiebung entlang der y-Achse.

► **Funktionsterm von f**

Gesucht ist die Funktionsgleichung $f(x)$. Die Funktion f ist eine Stammfunktion von f'. Zudem schneiden sich die Schaubilder von f und f' auf der y-Achse.

Eine Stammfunktion lässt sich über das Integral nach x bestimmen. Diese hat dann einen Parameter C, der der y-Achsenverschiebung der Funktion entspricht, die beim Ableiten eliminiert wird. Diesen Parameter kann man anschließend durch Einsetzen der Koordinaten des gemeinsamen Punktes von f und f' in die Gleichung der Stammfunktion ermitteln.

2.2.1 ► **Schaubild K von g** (3P)

Achte bei der Zeichnung auf die Wahl des richtigen Maßstabs und denke an die korrekte Achsenbeschriftung. Der Definitionsbereich von g gibt hierbei nützliche Hinweise.

2.2.2 **► Nachweis, dass die Wendepunkte von K auf der ersten Winkelhalbierenden liegen** (9P)

Gesucht sind die Wendepunkte von K, denen die Lage auf der ersten Winkelhalbierenden nachgewiesen werden muss. Wendepunkte sind Punkte, in denen die Steigung ein Extremum erreicht. Es sind also Hoch- oder Tiefpunkte der Steigung.

Die Änderungsrate der Steigung wird in einem Hoch- oder Tiefpunkt der Steigung Null. Da die Steigung einer Funktion durch ihre erste Ableitung definiert ist, ist die Änderungsrate der Steigung durch die zweite Ableitung bestimmt. Diese wird in einem Wendepunkt Null.

Die notwendige Bedingung für Wendepunkte lautet daher

$$f''(x) = 0$$

Damit es sich bei den Lösungen aber tatsächlich um Wendepunkte handelt, muss die hinreichende Bedingung für Wendepunkte -

$$f'''(x) \neq 0$$

ebenfalls erfüllt sein, da sonst kein Extremum der Steigung vorliegt.

Sind die Wendepunkte gefunden, muss gezeigt werden, da sie alle auf der ersten Winkelhalbierenden liegen.

Die erste Winkelhalbierende ist die Gerade durch den Ursprung, die den Winkel, den die Koordinatenachsen im ersten Quadranten einschließen, halbiert. Ihre Gleichung lautet:

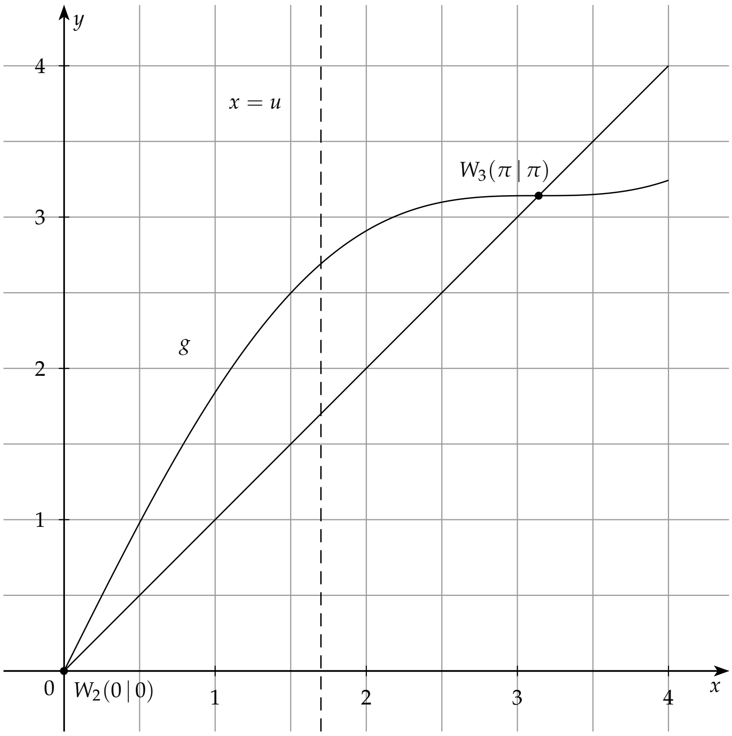
$$y = x$$

Die Funktionsgleichung sagt aus, dass die x-Koordinaten aller Punkte auf der ersten Winkelhalbierenden gleich deren y-Koordinaten sind. Ein Punkt der ersten Winkelhalbierenden lautet daher beispielsweise $S(6\,|\,6)$. Wenn die berechneten Wendepunkte diese Bedingung erfüllen, liegen sie auf der ersten Winkelhalbierenden.

► Parallele zur y-Achse, die die Fläche im Verhältnis 1 : 2 teilt

Es ist eine Parallele zur x-Achse gesucht, die die von K und erster Winkelhalbierender im 1. Quadranten eingeschlossene Fläche im Verhältnis $1 : 2$ teilt. Zur besseren Vorstellung ist bei dieser Aufgabenstellung eine Skizze des ersten Quadranten sinnvoll.

Da die Wendepunkte von K - wie zuvor gezeigt - auf der Winkelhalbierenden liegen, können diese ebenfalls in die Skizze eingetragen werden.



Man erkennt, dass sich die eingeschlossene Fläche in Intervall $[0; \pi]$ befindet.

Flächen unter Kurven werden allgemein über den Betrag des Integrals über das Intervall berechnet, innerhalb dessen sie sich befinden. In unserem Fall kann der Betrag vernachlässigt werden, da sich die Flächen im positiven y-Bereich befinden. Die eingeschlossene Fläche ist hierbei die Differenz zwischen der Fläche unter g und der Dreiecksfläche unter der ersten Winkelhalbierenden mit $y = x$.

Die Gesamtfläche kann daher als Integral der Differenz von g und $y = x$ über das Intervall $[0; \pi]$ dargestellt werden:

$$A_{GES} = \int_0^{\pi} (g(x) - x)\,\mathrm{d}x$$

Die Parallele zur y-Achse mit der Gleichung $x = u$ teilt diese Fläche in zwei Stücke. Ein Teilstück befindet sich dann im Intervall $[0; u]$, das andere im Intervall $[u; \pi]$. Diese beiden Teilstücke sollen nun im Verhältnis 1 : 2 zueinander stehen. Es gilt also entweder

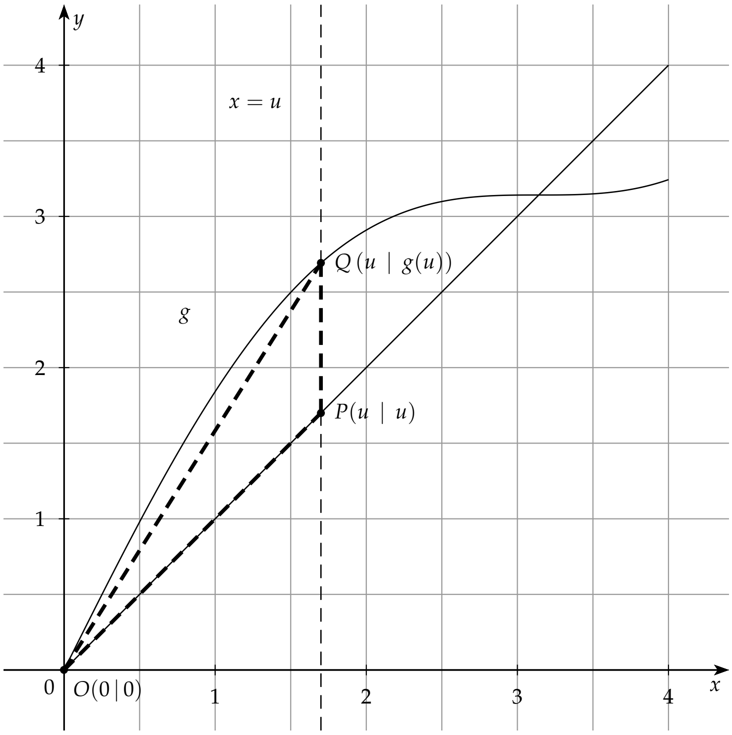
$$\frac{A_1}{A_2} = 2 \text{ oder}$$
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2}.$$

Die einzelnen Flächen können wie die Gesamtfläche auch als Integrale der Differenz zwischen g und $y = x$ dargestellt werden. Es ändern sich nur jeweils die Intervalle über die integriert wird.

Über die Gesamtfläche kann ermittelt werden wie groß A_1 und A_2 sein müssen, um dem Verhältnis zu entsprechen. Durch Gleichsetzen mit diesen Werten kann dann die unbekannte Intervallgrenze u ermittelt werden. Diese ist gleich der gesuchten Parallelen zur y-Achse.

2.2.3 ▶ **Wert von u, für den die Fläche des Dreiecks maximal wird** (5P)

Es ist wieder eine zur y-Achse parallele Gerade mit der Gleichung $x = u$ gesucht. Diese Gerade schneidet K im Punkt $Q(u \mid g(u))$ und die erste Winkelhalbierende mit der Gleichung $y = x$ folglich im Punkt $P(u \mid u)$. Zusammen mit dem Ursprung $O(0 \mid 0)$ bilden die drei Punkte das Dreieck $\triangle OPQ$. Zur besseren Vorstellung ist auch hier eine Skizze sinnvoll:



Wir können die Fläche des Dreiecks in Abhängigkeit von u darstellen.
Dazu nehmen wir die Seite PQ als Grundseite. Da die Punkte die gleichen x-Koordianten besitzen, ist die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ gleich der Differenz ihrer y-Koordinaten.

$$\overline{PQ} = g(u) - u$$

Die Höhe des Dreiecks ist der Abstand der Geraden durch die Grundseite zur Spitze O des Dreiecks. Dieser ist gerade gleich den x-Koordinaten von P und Q:

$$x = u.$$

Die Flächeninhaltsformel für Dreiecke lautet allgemein:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$$

Durch Einsetzen der Definitionen für die Grundseite und die Höhe ergibt sich eine Flächenfunktion $A_{\triangle}$ in Abhängigkeit von u mit der Gleichung

$$A_{\triangle}(u) = \frac{1}{2} \cdot (g(u) - u) \cdot u.$$

Diese Fläche soll nun maximal werden, für ein u, das Werte zwischen 0 und π annehmen kann.

2.2.4 ▶ **Bestimmung des Funktionsterms** (7P)

Gesucht ist der Funktionsterm eine Polynomfunktion 4. Grades. Allgemein lautet die Gleichung einer solchen Funktion:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Die Funktionsgleichung besitzt die fünf Parameter a, b, c, d und e. Es müssen daher fünf Bedingungen gegeben sein, damit allen diesen Parametern ein Wert zugewiesen werden kann. Diese kannst du der Aufgabenstellung entnehmen:

1. Das Schaubild der Funktion schneidet die x-Achse in $A(-1\,|\,0)$.
2. Das Schaubild der Funktion verläuft durch $B\left(2\,|\,\frac{9}{5}\right)$.
3. Das Schaubild hat im Ursprung einen Wendepunkt.
4. Das Schaubild verläuft durch den Ursprung $O(0\,|\,0)$.
5. Das Schaubild schneidet K im Ursprung senkrecht.

Aus diesen fünf Bedingungen lassen sich fünf Gleichungen mit den gesuchten Parametern aufstellen und lösen.

2.3.1 ▶ **Bereiche, in denen h_1 monoton wachsend und ihr Schaubild rechtsgekrümmt ist** (5P)

Gegeben ist die Funktion h_1 durch

$h_1(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{9}{20}x^3 - \frac{1}{2}x$ für $x \in \mathbb{R}$.

Eine Funktion steigt monoton, wenn ihre Steigung durchgehend größer oder gleich Null ist. Die Steigung einer Funktion ist durch ihre Ableitung definiert. Es gilt also einmal:

$\boldsymbol{h_1'(x) \geq 0}$

Rechtsgekrümmt ist ein Schaubild einer Funktion dann, wenn seine Steigung sinkt, also dann, wenn die Änderungsrate der Steigung negativ ist. Die Änderungsrate der Steigung wird durch die zweite Ableitung definiert. Es muss also ebenso gelten:

$\boldsymbol{h_1''(x) < 0}$

Nur dort, wo beide Bedingungen erfüllt sind, ist das Schaubild von h_1 monoton wachsend und rechtsgekrümmt.

2.3.2 ▶ **Nachweis eines Wendepunkts mit waagerechter Tangente** (6P)

Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente wird auch Sattelpunkt genannt. In einem Sattelpunkt

1. ist die Steigung gleich Null, der Punkt hat also eine waagerechte Tangente,

2. die Steigung erreicht ein Extremum, da es sich um einen Wendepunkt handelt.

Die Steigung ist durch die erste Ableitung von h_t gegeben. Die erste Bedingung lautet damit:

(I) $\boldsymbol{h_t'(x) = 0}$

Dort, wo die Steigung ein Extremum erreicht, ist die Änderungsrate der Steigung gleich Null. Die Änderungsrate ist durch die zweite Ableitung definiert. Es gilt also weiterhin:

(II) $\boldsymbol{h_t''(x) = 0}$

Da es sich um ein Extremum der Steigung handelt, muss die hinreichende Bedingung für Extrempunkte erfüllt sein. An einem Extremum der Steigung wechselt die Änderungsrate der Steigung von negativ nach positiv oder von positiv nach negativ. Dessen Ableitung - also die dritte Ableitung von h_t muss in diesem Punkt daher positiv oder negativ - aber nicht Null sein. Es gilt also zuletzt noch:

(III) $h_t'''(x) \neq \mathbf{0}$

Es gibt also drei Bedingungen, die von einem bestimmten t erfüllt werden müssen.