a) (1) ► **f und g vergleichen** (24 P)

Um Funktionen zu vergleichen, solltest du auf ihre Funktionswerte, die Steigung sowie Extrema und Nullstellen eingehen.
Dies musst du dann noch in den hier geforderten Sachzusammenhang einordnen. Achte also darauf, dass du den Kurven auch ihren richtigen Sachbezug zuordnest.

- Funktionswerte, Steigung, Extrema und Nullstellen vergleichen
- Sachzusammenhang, wenn gefordert
- Funktionen Bedeutung zuordnen

Zunächst einmal gibt dir die Aufgabe vor, dass g die Ozonkurve im Verlauf eines Tages auf dem Land darstellt, während f die Kurve der Ozonwerte in der Stadt verbildlicht.
Vergleichst du nun die Kurve, so kannst du darauf eingehen, dass die Graphen der Funktionen f und g sich im angegebenen Intervall nicht schneiden. Außerdem verläuft der Graph von g dauerhaft oberhalb des Graphen von f und somit gilt in diesem Intervall:

$0 \leq t \leq 14;\ f(t) < g(t)$

Somit soll der Ozonwert am nächsten Tag auf dem Land dauerhaft höher sein, als in der Stadt.

Als nächstes betrachtest du die Extrema der beiden Kurven.
Jede der Kurven weist genau ein Extremum in Form eines Hochpunktes in diesem Intervall auf. Diese befinden sich allerdings nicht auf der selben t-Koordinate, sondern für die Hochpunkte der Funktionen gilt:

$tH_f < tH_g$, wobei tH die Stelle des Hochpunktes beschreibt.

Somit ergibt sich das Maximum der Ozonbelastung in der Stadt früher am Tag als auf dem Land.

Nullstellen der Funktionen gibt es nicht, da Ozon immer in der Atmosphäre vorhanden ist und somit nie ein Wert von 0 vorrausgesagt werden kann.

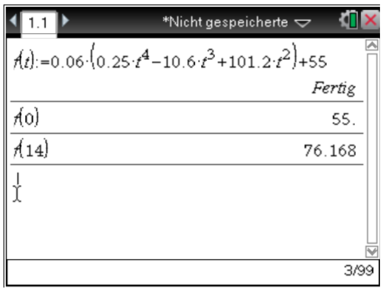
Abschließend kannst du noch die Steigung betrachten.
Hier wird deutlich, dass f wesentlich schneller ansteigt als g und auch, nachdem f die Extremstelle erreicht hat, wieder stark abfällt.
Der Anstieg des Ozonwertes wird durch die Sonneneinstrahlung bedingt, wobei dieser Effekt in der Stadt noch durch Abgase jeglicher Art verstärkt wird.
Somit findet sich auch das Extremum in der Stadt bei ca. $t = 8{,}8$, was einer Uhrzeit von 15 : 48 Uhr entspricht. Diese Uhrzeit wiederum ist bekannt als Hauptverkehrszeit in Städten.

(2) ▶ **Konzentrationen für $t = 0$ und $t = 14$ bestimmen**

Die allgemeine Formel zur Bestimmung eines Funktionswertes a zu einem Zeitpunkt t_0 lautet $f(t_0) = a$.

- Setze $t = 0$ und $t = 14$ in $f(t)$

Gib zunächst die Funktionsgleichung von f in deinen CAS-Rechner ein, um dann die Funktionswerte zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 14$ zu berechnen. Diese sind durch die Aufgabe als 7 und 21 Uhr definiert.



Somit ergeben sich die Werte mit $f(0) = 55$ und $f(14) = 76{,}168$.

(3) ▶ **Zeitpunkt höchster Ozonkonzentration in der Stadt**

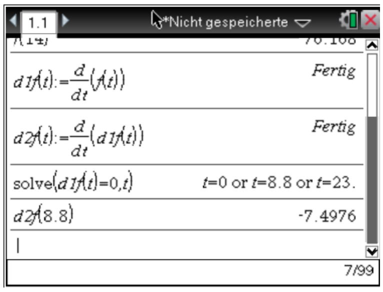
Die höchste Ozonkonzentration beschreibt den Funktionswert der Extremstelle. Folglich musst du zunächst die Extremstelle bestimmen.
Dazu musst du die notwendige Bedingung mit $f'(x) = 0$ sowie die hinreichende Bedingung mit $f''(x) < 0$ erfüllen.

- notwendige hinreichende Bedingung der Nullstelle
- $f'(x) = 0$
- $f''(x) < 0$

Leite zunächst die Funktion f mittels des Befehls $\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{dx}}\mathtt{f(x)}$ zweimal ab. Stelle dann die obigen Gleichungen auf und löse sie mittels deines Rechners.

Dein Rechner sollte nun wie nebenstehend aussehen.

Verwende nur den Wert $t = 8{,}8$, da $t = 23$ nicht mehr im betrachteten Intervall liegt und der Funktionswert $f(0)$ nach einem Blick auf das Schaubild der niedrigste Funktionswert von f im betrachteten Intervall ist.



Somit ergibt sich an der Stelle $t = 8{,}8$ die Extremstelle von f mit $f(8{,}8) = 181{,}754$.

(4) ► **Unterschiede der beiden Funktionen**

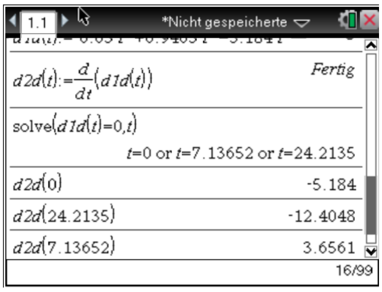
Allgemein beschreibst du die Unterschiede zweier Funktionen über $d(t) = g(t) - f(t)$. Um die Stelle des geringsten Unterschieds herauszufinden, musst du die Funktion d auf Minima untersuchen.

Dazu muss die notwendige Bedingung $d'(t) = 0$ sowie die hinreichende Bedingung mit $d''(t) > 0$ gelten.

Um zu prüfen, ob d niemals unter einen bestimmten Wert b sinkt, setze $d(t) > b$. Die Ausgabe von `true` bestätigt diese Aussage.

- Stelle d mit $d(t) = g(t) - f(t)$ auf
- $d'(t) = 0$ und $d''(t) > 0$
- $d(t) > b$ mit b als Wert der geprüft werden soll

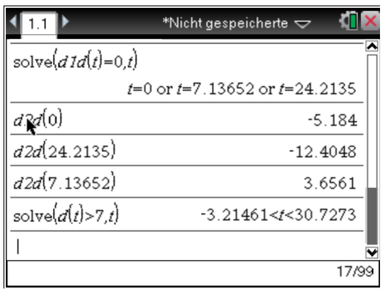
Trage zunächst die Funktion d wie folgt in deinen Rechner ein und prüfe dann die Bedingungen.



Somit ergibt sich für $t = 7{,}137$ der geringste Abstand von f und g.

Prüfe nun ob der Abstand immer über $7\,\frac{\mu g}{m^3}$. Setze dazu $d(t) > 7$.

Da das Intervall $-3{,}215 < t < 30{,}727$ auch das gegebene Intervall mit $0 \leq t \leq 14$, gilt für das gegebene Intervall, dass der Unterschied niemals unter $7\,\frac{\mu g}{m^3}$ fällt.



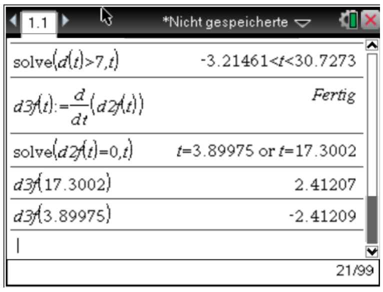
b) (1) ▶ **Zeitpunkte stärkster Zu- und Abnahme in der Stadt bestimmen** (18 P)

Die Zu- und Abnahme werden allgemein über die Steigung der Kurve beschrieben. Die Steigung wird in den Wendepunkten der Kurve maximal. Prüfe daher den Graphen von f auf Wendepunkte. Hierzu müssen die Bedingungen $f''(t) = 0$ und $f'''(t) \neq 0$ erfüllt sein.

Sind keine 2 Wendepunkte in dem betrachteten Intervall vorhanden, so musst du eine Randwertbetrachtung durchführen, um die Stellen maximaler Steigung zu bestimmen.

- Graphen auf Wendepunkte prüfen
- $f''(t) = 0$ und $f'''(t) \neq 0$
- Randwertbetrachtung, falls Zu- und Abnahme nicht durch Wendepunkte beschrieben werden

Bilde zunächst die 3. Ableitung von f, indem du die 2. Ableitung noch einmal ableitest. Setze dann die 2. Ableitung gleich 0 und setze den oder die resultierenden Werte in die 3. Ableitung ein.
Beachte, dass die Werte innerhalb des Intervalls liegen.



Somit ergeben sich die beiden Wendepunkte bei $t_1 \approx 3,9$ und $t_2 \approx 17,3$. Allerdings liegt t_2 außerhalb des Intervalls, sodass wir die Steigung bei $t_3 = 14$ als maximale Abnahme annehmen müssen.

Folglich ergibt sich die größte Zunahme im Intervall bei $t_1 \approx 3,9$ und die stärkste Abnahme bei $t_2 = 14$.

(2) ▶ **Bedeutung des Integrals im Sachzusammenhang**

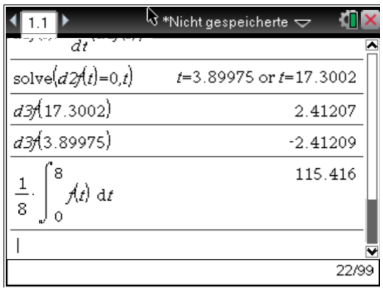
Das Integral $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ beschreibt allgemein den Durchschnittswert der Funktionswerte über den integrierten Zeitraum.

Setze das Integral in die oben genannte Formel in, sodass du folgenden Term erhältst $\frac{1}{(a+8)-a} \cdot \int_a^{a+8} f(t)\mathrm{d}t$.
Vereinfache den Bruch, sodass du $\frac{1}{8} \cdot \int_a^{8+a} f(t)\mathrm{d}t$ erhältst.
Nach der Definition beschreibt das Integral also die durchschnittliche Ozonkonzentration über einen von a abhängigen 8 Stunden Zeitraum innerhalb des Intervalls $0 \leq t \leq 14$.

(3) ▶ Integral berechnen

Das Integral beschreibt den Durchschnittswert im Zeitraum $0 \leq t \leq 8$. Diesen kannst du mittels des `integral`-Befehls auf deinem Taschenrechner lösen.

Integriere also die Funktion f und berechne das Integral mittels deines CAS-Rechners.



Daraus ergibt sich die durchschnittliche Ozonkonzentration mit

$$\frac{1}{8}\int_0^8 f(t)\mathrm{d}t \approx 115,416$$

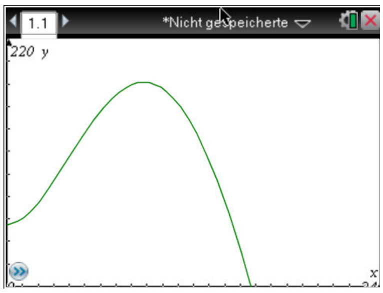
(4) ▶ Begründung gegen f im Intervall $(0;24)$

Ein gewisser Bereich des Intervalls ist bereits als realistisch angenommen. Folglich musst du diesen im weiteren Schritt nicht mehr beachten.

Prüfe die Funktion im Rest des Intervalls auf unrealistische Bedingungen wie Nullstellen oder Streben der Funktion gegen unendlich.

- Zu betrachtenden Bereich eingrenzen
- auf unrealistische Gegebenheiten
- Nullstellen oder Streben gegen unendlich

Lasse dir zunächst den Graphen der Funktion im Bereich $14 \leq t \leq 24$ zeichnen, um einen Überblick über den weitern Verlauf zu erhalten.



Daraus ist ersichtlich, dass sich eine Nullstelle ergibt und die Funktionswerte der Funktion dann weiter ins Negative streben.

Berechne nun die Nullstelle von f sowie die Steigung in der Nullstelle, um diese Behauptung zu unterstreichen.

Daraus ergibt sich die Nullstelle bei $t = 15,738$ mit einer Steigung von
$f'(15,738) = -45,576$.
Da es aber weder einen Ozonwert von 0 noch einen negativen Ozonwert gibt, kann man folglich die Funktion f als nicht geeignet zur Darstellung der Ozonkonzentration in einem größeren Zeitintervall als $[0;14]$ beschreiben.

c) (1) ► **Heutige maximale Ozonkonzentration bestimmen** (8 P)

Dir ist eine Gleichung mit 3 Variablen gegeben, von denen dir 2 vorgegeben werden. Setze die gegebenen Werte ein und löse nach dem gesuchten Wert auf.

Setze die Werte für $O_m = 180$ und $T_m = 28$ ein und löse nach O_h auf.

$$\begin{aligned}
O_m &= 0,25 \cdot O_h + 5,5 \cdot T_m - 40 \\
180 &= 0,25 \cdot O_h + 5,5 \cdot 28 - 40 && \mid +40 \\
220 &= 0,25 \cdot O_h + 154 && \mid -154 \\
66 &= 0,25 \cdot O_h && \mid \cdot 4 \\
264 &= O_h
\end{aligned}$$

Somit muss ein heutiger maximaler Ozonwert von $O_h = 264$ gemessen werden, damit die Bedingungen erfüllt werden.

(2) ► **Tageshöchsttemperatur bestimmen**

Dir ist eine Gleichung mit 3 Variablen gegeben, von denen dir 2 vorgegeben werden. Setze die gegebenen Werte ein und löse nach dem gesuchten Wert auf.

Setze die Werte für $O_m = 240$ und $O_h = 60$ ein und löse nach T_m auf.

$$\begin{aligned}
O_m &= 0,25 \cdot O_h + 5,5 \cdot T_m - 40 \\
240 &= 0,25 \cdot 60 + 5,5 \cdot T_m - 40 \\
240 &= 5,5 \cdot T_m - 25 && \mid +25 \\
265 &= 5,5 \cdot T_m && \mid :5,5 \\
48,1818 &= T_m
\end{aligned}$$

Somit müsste eine Tageshöchsttemperatur von $T_m = 48,1818\,°C$ prognostiziert werden, damit die Alarmschwelle erreicht würde.