

a) (1) ► Erstellen eines vollständigen Baumdiagramms

(7P)

Deine Aufgabe ist es hier, zum in der Aufgabenstellung beschriebenen Sachverhalt ein vollständiges Baumdiagramm zu erstellen. Der Aufgabenstellung kannst du dabei entnehmen, dass bei der Fernsehendung „Sport in 3D“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% Bildstörungen (Ereignis B) auftreten. Ist das Bild dann gestört, so treten mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% auch Tonstörungen auf (Ereignis T). Ist das Bild hingegen einwandfrei (\bar{B}), so ist auch der Ton mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% einwandfrei (\bar{T}).

Hier handelt es sich also um ein zweistufiges Zufallsexperiment. Auf der ersten Stufe wird dabei unterschieden, ob

- Bildstörungen auftreten, oder nicht. Also: B oder Gegenereignis \bar{B} .

Auf der zweiten Stufe wird dann jeweils unterschieden, ob

- Tonstörungen auftreten, oder nicht. Also: T oder Gegenereignis \bar{T} .

Weiterhin musst du hier beachten, dass die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse T und \bar{T} abhängig vom Ereignis sind, welches zuvor eingetreten ist, nämlich B oder \bar{B} , das heißt, hier handelt es sich je um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.

- Ereignis B : Wahrscheinlichkeit für Tonstörungen: $P_B(T) = 0,6$.
- Ereignis \bar{B} : Wahrscheinlichkeit für Tonstörungen: $P_{\bar{B}}(T) = 0,1$.

Erstelle auf Grundlage dieser Erkenntnisse das Baumdiagramm zum Sachverhalt.

(2) ► Überprüfen, ob die Ereignisse B und T stochastisch unabhängig sind

Nun sollst du überprüfen, ob die Ereignisse B („In der 3D-Übertragung treten Bildstörungen auf“) und T („In der 3D-Übertragung treten Tonstörungen auf“) stochastisch unabhängig sind. Bevor du jedoch überprüfen kannst, ob die Ereignisse B und T stochastisch unabhängig sind, musst du zunächst ermitteln, mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(T)$, unabhängig vom vorherigen Ereignis, Tonstörungen eintreten, da die stochastische Unabhängigkeit ohne $P(T)$ nicht überprüfbar wäre. Dabei sind diese Ereignisse zu betrachten:

- Es treten Tonstörungen (T) auf, unter der Bedingung, dass es vorher Bildstörungen (B) gab.
- Es treten Tonstörungen (T) auf, unter der Bedingung, dass es keine Bildstörungen (\bar{B}) gab.

Die allgemeine Wahrscheinlichkeit $P(T)$ für das Ereignis T berechnest du dann auf Grundlage der obigen Aussagen, sowohl über Pfadaddition als auch Pfadmultiplikation.

Beim anschließendem Untersuchen der stochastischen Unabhängigkeit gibt es zwei verschiedene Lösungswege. Zum Einen lässt sich diese mit Hilfe einer bedingten Wahrscheinlichkeit:

- Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn gilt: $P(B) = P_A(B)$

und zum Anderen mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignis:

- Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn gilt:
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

überprüfen.

b) ► **Berechnen der Wahrscheinlichkeit für einwandfreies Bild, falls der Ton gestört ist** (3P)

Deine Aufgabe ist es hier, die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Bild zu berechnen, falls der Ton gestört ist. Anders formuliert: Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das TV-Gerät ein einwandfreies Bild zeigt, **unter der Bedingung**, dass der Ton bereits gestört ist.

Dies ist eine **bedingte Wahrscheinlichkeit**, wobei die Bedingung durch Ereignis T (Tonstörung) gegeben ist. In Formeln lautet sie: $P_T(\bar{B})$.

Rechne weiter über die Formel zur bedingten Wahrscheinlichkeit (Satz von Bayes). Die benötigten Wahrscheinlichkeiten kannst du deinem im Aufgabenteil a erstellten Baumdiagramm entnehmen.

c) ► **Berechnen des maximalen Wert $P(Z)$** (5P)

Der Aufgabenstellung kannst du nun entnehmen, dass ein weiteres Ereignis Z betrachtet werden soll und zwar: „Ein Zuschauer wechselt den Sender“. Du weißt von diesem Ereignis, dass wenn keine Bildstörung eintritt, tritt Z mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $\frac{1}{6}$ ein. Falls nun aber doch eine Bildstörung eintritt, so wechselt der Zuschauer mit Sicherheit den Sender. Deine Aufgabe ist es jetzt, den maximalen Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(Z)$ des Ereignisses Z zu berechnen.

Um diese Aufgabe zu lösen, musst du also wieder Ereignis B („Bild gestört“) betrachten, denn das Verhalten des Zuschauers beim Senderwechsel ist abhängig von den herrschenden Bildverhältnissen. Um zu sehen, wie Ereignis B und Z zusammenhängen, ist es hier sinnvoll, den Sachverhalt in einem Baumdiagramm darzustellen. Auch hier handelt es sich um ein zweistufiges Zufallsexperiment. Auf der ersten Stufe wird unterschieden zwischen:

- Bildstörung B oder keine Bildstörung \bar{B} .

Auf der zweiten Stufe wird dann das Verhalten der Zuschauer bezüglich des Senderwechsels betrachtet, also wird zwischen

- Zuschauer wechselt Sender Z und Zuschauer wechselt Sender nicht \bar{Z}

unterschieden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zuschauer den Sender wechselt unter der Bedingung, dass das Bild (B) gestört ist, liegt bei 100 %. Das heißt, das Ereignis \bar{Z} unter dieser Bedingung nicht eintreten.

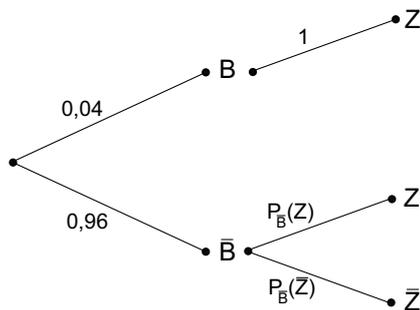
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Zuschauer den Sender wechselt (Z) unter der Bedingung, dass das Bild nicht gestört (\bar{B}), ist kleiner als $\frac{1}{6}$, es gilt also:

$$\bullet 0 \leq P_{\bar{B}}(Z) \leq \frac{1}{6}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Zuschauer den Sender nicht wechselt (\bar{Z}) unter der Bedingung, dass das Bild nicht gestört ist (\bar{B}), ist größer als $\frac{1}{6}$, es gilt also:

$$\bullet \frac{1}{6} \leq P_{\bar{B}}(\bar{Z}) \leq 1.$$

Das resultierende Baumdiagramm sieht also so aus:



Die maximale Wahrscheinlichkeit $P(Z)$ ermittelst du, indem du zunächst die entsprechenden Pfade im Baumdiagramm betrachtest und über Pfadaddition und Pfadmultiplikation verknüpfst. Der daraus entstehenden Ungleichung kannst du dann die maximale Wahrscheinlichkeit $P(Z)$ entnehmen.

d) ► **Berechnen der Mindestgröße von p**

(4P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass im Studio ein Fußballtor aufgebaut ist, auf das Sportler und Studiogäste schießen dürfen, wobei ein Gast das Tor mit einer unbekanntem Wahrscheinlichkeit p trifft.

Deine Aufgabe ist es hier, eine Mindestgröße von p so zu berechnen, dass der Studiogast bei 6 Versuchen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % mindestens einmal trifft.

Betrachte dazu die Zufallsgröße X , welche die Anzahl der Treffer beschreibt. X kann als binomialverteilte Zufallsgröße angenommen werden, da diese nur folgende zwei Ausprägungen besitzt

- „Gast trifft das Tor“ und
- „Gast trifft das Tor nicht“,

außerdem bleibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Studiogast das Tor trifft, mit p konstant. Auf Grundlage dessen kann hier näherungsweise von einem Ziehen mit Zurücklegen ausgegangen werden. Das heißt, X ist binomialverteilt mit unbekanntem p und einem Stichprobenumfang von $n = 6$, da der Studiogast insgesamt 6 Versuche besitzt. Nun soll Wahrscheinlichkeit p so angepasst werden, dass folgender Zusammenhang erfüllt ist:

$$P(X \geq 1) \geq 0,95.$$

Diese Ungleichung drückt aus, dass die Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein Studiogast mindestens einmal bei 6 Versuchen das Tor trifft, größer als 95 % sein soll.

Löse die oben stehende Ungleichung mit dem zugehörigen Gegenereignis nach dem unbekanntem p auf.

e) (1) ► **Bestimmen von $f(p)$**

(6P)

Hier sollst du nun Funktion f mit dem Funktionsterm $f(p)$ betrachten. Diese Funktion f soll die Wahrscheinlichkeit dafür beschreiben, dass ein Gast bei 6 Versuchen das Fußballtor aus Teilaufgabe d) höchstens einmal trifft. Deine Aufgabe ist es dabei den Funktionsterm $f(p)$ dieser Funktion f zu bestimmen.

Im Aufgabenteil d) hast du die binomialverteilte Zufallsgröße X mit p unbekannt und $n = 6$ betrachtet. Diese Zufallsgröße hat die Anzahl der Treffer eines Studiogastes beschrieben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gast bei 6 Versuchen höchstens einmal trifft, entspricht also der Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert kleiner gleich 1 annimmt und lässt sich über folgenden Term beschreiben:

$$P(X \leq 1).$$

Willst du nun $f(p)$ bestimmen, so setzt du in den Ansatz oben die Formel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer binomialverteilten Zufallsgrößen ein und formst um.

(2) ► **Zeigen, dass Funktion f streng monoton fallend ist**

Nun ist es deine Aufgabe zu zeigen, dass Funktion f streng monoton fallend ist. Ist eine beliebige Funktion streng monoton fallend, so besitzt diese an jeder Stelle einen Ableitungswert echt kleiner Null. Für die erste Ableitung f' von f muss also gelten:

$$f'(p) < 0, \text{ für } 0 < p < 1.$$

Bestimme beim Lösen dieser Aufgabe also im ersten Schritt die erste Ableitungsfunktion f' von f mit deinem CAS, um im zweiten Schritt begründen zu können, dass diese für $0 < p < 1$ nur Funktionswerte echt kleiner Null annimmt.

f) ► **Bestimmen, wie viele Lampen mindestens bestellt werden müssen**

(5P)

Zur richtigen Ausleuchtung des Studios, in welchem die 3D-Aufnahmen gedreht werden, benötigt der Sender 400 neue und einwandfreie Halogenlampen. Von diesen Halogenlampen sind erfahrungsgemäß 2 % der jeweils gelieferten Lampen schadhaft.

Deine Aufgabe ist es, die Anzahl der Lampen zu bestimmen, die mindestens bestellt werden müssen, sodass mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens 400 einwandfreie Halogenlampen in der Lieferung vorhanden sind.

Betrachtet wird hierzu die Zufallsgröße Y , welche die Anzahl der einwandfreien Lampen beschreibt. Zufallsgröße Y kann als binomialverteilt angesehen werden, da diese nur 2 Ausprägungen besitzt:

- „Lampe ist schadhaft“ oder
- „Lampe ist einwandfrei“

und aufgrund der konstanten Wahrscheinlichkeit für einwandfreie Lampen ($p = 1 - 0,02 = 0,98$) davon ausgegangen werden kann, dass es sich hier näherungsweise um ein Ziehen mit Zurücklegen handelt. Y ist also binomialverteilt mit $p = 0,98$ und n unbekannt. Dieses n sollst du nun so bestimmen, dass die Wahrscheinlichkeit für mindestens 400 einwandfreie Lampen mindestens 99 % ist. Verwende dazu das zugehörige Gegenereignis.

$$P(Y \geq 400) \geq 0,99$$

Das Gegenereignis, zu mindestens 400 einwandfreien Lampen ist:

- „Weniger als 400 Lampen sind einwandfrei“.

Aufgrund des großen Stichprobenumfangs (es muss mindestens $n \geq 400$ gelten) ist hier eine Näherung durch die Normalverteilung hier möglich. Zum Lösen dieser Aufgabe, kannst du also so vorgehen:

- Berechne zunächst den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der binomialverteilten Zufallsgröße Y und begründe, wann diese durch die Normalverteilung angenähert werden darf (Achtung: n unbekannt!).
- Definiere eine normalverteilte Zufallsgröße mit μ und σ und forme die Ungleichung $P(Y \geq 400) \geq 0,99$ mit dieser um.
- Löse die Ungleichung im Calculator-Modus deines CAS mit dem `solve`-Befehl,