1.1 ▶ Größtmöglichen Definitionsbereich bestimmen

Du sollst angeben, welches der größtmögliche Definitionsbereich D_f der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4 \cdot x - 4}$ ist.

Überlege von was der Definitionsbereich abhängt.

Aus negativen Zahlen darfst du keine Wurzel ziehen, daraus folgt:

$$\begin{aligned} 4 \cdot x - 4 &\geq 0 \qquad &| +4 \\ 4 \cdot x &\geq 4 \qquad &| :4 \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$

Damit ist Antwort 4 richtig.

1.2 ▶ Anstieg der Tangente des Graphen bestimmen

Du sollst den Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x = 1$ bestimmen.

Den Anstieg der Tangente kannst du über die 1. Ableitung f' von f berechnen. Leite die Funktion f einmal ab und setze $x = 1$ in die 1. Ableitung ein.

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Somit gibt Feld 4 die richtige Antwort an.

1.3 ▶ Stammfunktion finden

Du sollst eine richtige Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = 1 - x^3$ finden.

Bilde die Stammfunktion der Funktion f mit Hilfe der Integrationsregeln.

$$f(x) = 1 - x^3$$

$$F(x) = x - \frac{1}{3+1} \cdot x^{3+1} = x - \frac{1}{4} \cdot x^4$$

Feld 2 entspricht der richtigen Antwort.

1.4 ▶ Lage der Ebenen zueinander bestimmen

Du sollst bestimmen wie die Ebenen E_1 und E_2 zueinander liegen.

Aus den Ebenengleichungen kannst du die Normalenvektoren ablesen:

$$\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wenn die Ebenen parallel oder identisch wären, müssten die Normalenvektoren übereinstimmen oder Vielfache voneinander sein. Somit kannst du die Felder 1 und 2 als richtige Antwort ausschließen.

Überprüfe ob das Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren Null ergibt, ist dies der Fall, stehen die Vektoren orthogonal zueinander und damit schneiden sich die Ebenen orthogonal.

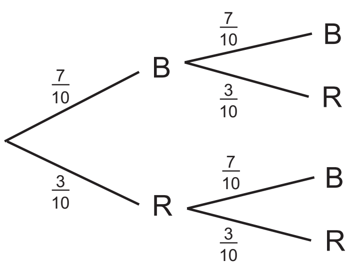
$$\overrightarrow{n_{E_1}} \circ \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

Somit schneiden sich die Ebenen orthogonal und Feld 4 gibt die richtige Antwort an.

1.5 ▸ Wahrscheinlichkeit für Ereignis A angeben

Du sollst angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Ereignis A: Mindestens eine rote Kugel wird gezogen eintritt.

Erstelle mit Hilfe der Angaben aus der Aufgabe ein Baumdiagramm.
B = blau; R = rot



Die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A eintritt berechnest du mit:

$P(A) = P(BR) + P(RB) + P(RR) =$

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{51}{100}$$

alternativer Lösungsweg

Du kannst auch über das Gegenereignis: nur blaue Kugeln werden gezogen rechnen:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(BB) = 1 - \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = 1 - \frac{49}{100} = \frac{51}{100}$$

Feld 5 liefert die richtige Antwort.

2 ▸ Überprüfung, ob sich die Tangenten orthogonal schneiden

Du sollst überprüfen, ob sich die Tangenten in den beiden Schnittpunkten des Graphen der Funktion f mit der x-Achse orthogonal schneiden.

Dazu berechnest du zunächst die x-Werte an den Nullstellen. Anschließend berechnest du die Steigungen der Tangenten in den Nullstellen, indem du die 1. Ableitung f' der Funktion f bildest und die x-Werte einsetzt.

Tangenten schneiden sich orthogonal, wenn für die Steigungen gilt:

$$m_{t_1} = -\frac{1}{m_{t_2}}$$

1. Schritt: Nullstellen berechnen

Um die Nullstellen zu berechnen setzt du die Funktion f gleich Null.

$f(x) = x^2 + x - 2 = 0$

Diese Gleichung kannst du mit Hilfe der PQ-Formel lösen:

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
x_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-2)} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$

alternativer Lösungsweg

Du kannst die Gleichung auch mit Hilfe der Mitternachtsformel lösen.

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \\
&= \frac{-1 \pm 3}{2}
\end{aligned}
$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{(-4)}{2} = -2$$

Die Nullstellen liegen bei $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$.

2. Schritt: Steigung der Tangenten in den Nullstellen berechnen

Ermittle zunächst die 1. Ableitung f' von f und setze die Nullstellen ein. Du erhältst die Steigungen m_1 und m_2.

$f(x) = x^2 + x - 2$

$f'(x) = 2x + 1$

$f'(x_1) = f'(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 = m_1$

$f'(x_2) = f'(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3 = m_2$

3. Schritt: Nachweisen, dass sich die Tangenten orthogonal schneiden

$m_1 = -\frac{1}{m_2}$
$3 \neq -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$
Somit hast du nachgewiesen, dass sich die beiden Tangenten in den Nullstellen des Graphen der Funktion f nicht orthogonal schneiden.

3.1 ▶ **Nachweis, dass die Punkte A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind** (2P)

Du sollst zeigen, dass die Punkte A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind.

Die drei Punkte bilden kein Dreieck, wenn sie sich auf einer Geraden befinden, also musst du nachweisen, dass sie nicht auf einer Geraden liegen.

Dies kannst du tun, indem du die Gleichung der Geraden bestimmst, die durch die Punkte A und B geht. Anschließend überprüfst du mit einer Punktprobe, ob Punkt C auch auf dieser Geraden liegt.

1. Schritt: Gleichung der Geraden durch Punkt A und B

Die Gleichung der Geraden g durch Punkt A und B kannst du aufstellen, indem du den Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ des Punkts A als Stützvektor und den Vektor $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor wählst.

$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2-1 \\ 7-2 \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Schritt: Punktprobe mit Punkt C

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & -3 = & 1 + 1 \cdot r \\ \text{(II)} & 2 = & 2 + 5 \cdot r \\ \text{(III)} & 4 = & 5 + 3 \cdot r \end{array}$$

$$\begin{array}{lrll} \text{(I)} & -3 = & 1 + 1 \cdot r & \quad | -1 \\ & -4 = & r_1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrll} \text{(II)} & 2 = & 2 + 5 \cdot r & \quad | -2 \\ & 0 = & 5 \cdot r & \quad | :5 \\ & 0 = & r_2 & \end{array}$$

$r_1 \neq r_2$

Damit liegen die Punkte A, B und C nicht auf eine Geraden und sind somit Eckpunkte eines Dreiecks.

3.2 ▶ **a bestimmen, dass die Strecke $\overline{AD_a}$ die Länge 2 hat**

Du sollst a so bestimmen, dass die Strecke $\overline{AD_a}$ die Länge 2 hat.

Das a kannst du berechnen, indem du den Betrag des Vektors $\overrightarrow{AD_a}$ gleich 2 setzt.

Den Betrag eines Vektor berechnest du so:

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 + (z_D - z_A)^2}$

Nun setzt du die Werte ein und löst nach a auf:

$$
\begin{aligned}
2 &= \sqrt{(a-1)^2+(2-2)^2+(3-5)^2} && \\
2 &= \sqrt{(a-1)^2+4} && \mid\ ^2 \\
4 &= (a-1)^2+4 && \mid -4 \\
0 &= (a-1)^2 && \mid \sqrt{} \\
0 &= a-1 && \\
1 &= a &&
\end{aligned}
$$

Die Strecke $\overline{AD_a}$ hat für $a=1$ die Länge 2.

4 ▶ **Überprüfen, ob der zweite Würfel wie gewünscht manipuliert werden kann**

Du sollst überprüfen, ob es möglich ist, den zweiten Würfel so zu manipulieren, dass Ereignis B mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 20% eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis B eintritt setzt sich zusammen, aus der Wahrscheinlichkeit, dass mit dem ersten Würfel eine 6 gewürfelt wird, also $\frac{1}{6}$ und der Wahrscheinlichkeit, dass mit dem zweiten Würfel auch eine 6 gewürfelt wird p_2. Diese Wahrscheinlichkeit soll mindestens $\frac{1}{5}$ betragen.

$P(B) = \frac{1}{6}\cdot p_2 \geq \frac{1}{5}$

Nach p_2 auflösen:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{6}\cdot p_2 &\geq \frac{1}{5} && \mid \cdot\frac{6}{1} \\
p_2 &\geq \frac{1}{5}\cdot\frac{6}{1} && \\
p_2 &\geq \frac{6}{5} &&
\end{aligned}
$$

Die Wahrscheinlichkeit $p_2 \geq \frac{6}{5}$ ist größer 1 und damit unmöglich.

Es ist nicht möglich, den zweiten Würfel so zu manipulieren, dass das Ereignis B zu mindestens 20% eintritt.