1. **► Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ nachweisen** (7BE)

Für den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ gilt:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 0,2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

Damit sind die Koordinaten von $M\,(25 \mid 30 \mid 0,2)$ nachgewiesen.

► Koordinatengleichung von E nachweisen

Dieser Nachweis kann auf verschiedene Arten vollzogen werden: Einmal durch **Einsetzen** der Parametergleichung in die Koordinatengleichung, durch **Berechnen des Normalenvektors** und durch **Ausmultiplizieren der Parametergleichung**.

►► Lösungsweg A: Nachweis durch Einsetzen

Teile die Parametergleichung der Ebene E auf die Zeilen auf und erhalte:

$$\begin{aligned} x &= 20 - 3s + 4t \\ y &= 30 - 2s + t \\ z &= 14,2 + 4s - 7t \end{aligned}$$

Setze diese Werte für x, y und z nun in die Koordinatengleichung ein und zeige, dass sich eine wahre Aussage ergibt:

$$\begin{aligned} 10 \cdot (20 - 3s + 4t) - 5 \cdot (30 - 2s + t) + 5 \cdot (14,2 + 4s - 7t) &= 121 \\ 200 - 30s + 40t - 150 + 10s - 5t + 71 + 20s - 35t &= 121 \\ 121 &= 121 \end{aligned}$$

Dies ist eine wahre Aussage. Damit ist nachgewiesen, dass durch die Parameterform und die Koordinatenform die gleiche Ebene E beschrieben wird.

►► Lösungsweg B: Nachweis über den Normalenvektor

Die allgemeine Koordinatenform der Ebene lautet $E: ax + by + cz = d$. Die **Koeffizienten** a, b und c sind dabei genau die **Koordinaten** des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$.

Aus der Koordinatengleichung der Ebene E ergibt sich also zunächst der Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Der Normalenvektor steht **senkrecht auf jeden der beiden Richtungsvektoren**, d.h. das **Skalarprodukt** des Normalenvektors mit jedem der beiden Richtungsvektoren von E muss Null ergeben. Weise dies nach:

$$\begin{pmatrix}10\\-5\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix} = 10\cdot(-3)+(-5)\cdot(-2)+5\cdot 4 = -30+10+20 = 0$$

$$\begin{pmatrix}10\\-5\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\1\\-7\end{pmatrix} = 10\cdot 4+(-5)\cdot 1+5\cdot(-7) = 40-5-35 = 0$$

Damit ist nachgewiesen, dass $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}10\\-5\\5\end{pmatrix}$ der Normalenvektor der Ebene E ist. Setze nun noch die Koordinaten des Stützvektors von E ein in die Parametergleichung und zeige, dass sich eine wahre Aussage ergibt:

$10\cdot 20-5\cdot 30+5\cdot 14,2 = 200-150+71 = 121$. Damit ist nachgewiesen, dass $\overrightarrow{n}$ der Normalenvektor der Ebene E ist. Da auch der Stützvektor von E die Koordinatengleichung erfüllt, ist damit gezeigt, dass die Parametergleichung und die Koordinatengleichung die gleiche Ebene beschreiben.

►► Lösungsweg C: Nachweis durch Ausmultiplizieren

Teile die Parametergleichung wieder in die drei Zeilen auf und erhalte damit ein **lineares Gleichungssystem**. Versuche nun, durch Auflösen des LGS eine **parameterfreie** Darstellung der Ebene zu erhalten. Diese muss der Koordinatengleichung von E entsprechen:

$$\begin{array}{lrcl l}
\text{I} & x &=& 20-3s+4t & \\
\text{II} & y &=& 30-2s+t & \\
\text{III} & z &=& 14,2+4s-7t & \text{Rechne: } 2\cdot\text{II}+\text{III} \\
\hline
\text{I} & x &=& 20-3s+4t & \\
\text{II} & y &=& 30-2s+t & \\
\text{IIIa} & 2y+z &=& 74,2-5t &
\end{array}$$

Aus IIIa folgt:

$$\begin{aligned}
2y+z &= 74,2-5t && \mid -74,2\\
2y+z-74,2 &= -5t && \mid :(-5)\\
-\frac{2}{5}y-\frac{1}{5}z+14,84 &= t
\end{aligned}$$

Setze diesen Wert für t ein in II:

$$\begin{aligned}
y &= 30-2s-\frac{2}{5}y-\frac{1}{5}z+14,84\\
y &= 44,84-2s-\frac{2}{5}y-\frac{1}{5}z && \mid -44,84+\frac{2}{5}y+\frac{1}{5}z\\
\frac{7}{5}y+\frac{1}{5}z-44,84 &= -2s && \mid :(-2)\\
-\frac{7}{10}y-\frac{1}{10}z+22,42 &= s
\end{aligned}$$

Setze die Werte für s und t ein in I:

$$\begin{aligned}
x &= 20 - 3 \cdot \left(-\frac{7}{10}y - \frac{1}{10}z + 22{,}42\right) + 4 \cdot \left(-\frac{2}{5}y - \frac{1}{5}z + 14{,}84\right) \\
x &= 20 + \frac{21}{10}y + \frac{3}{10}z - 67{,}26 - \frac{8}{5}y - \frac{4}{5}z + 59{,}36 \\
x &= 12{,}1 + \frac{5}{10}y - \frac{5}{10}z && | \cdot 10 \\
10x &= 121 + 5y - 5z && | -5y + 5z \\
10x - 5y + 5z &= 121
\end{aligned}$$

Damit ist die Koordinatengleichung von E nachgewiesen.

2. ► **Parallelität nachweisen** (9BE)

Stelle zunächst eine Geradengleichung auf, welche die neue Flugbahn des Helikopters beschreibt. Benutze dazu den Ortsvektor $\overrightarrow{OM}$ zum Punkt M als Stützvektor und den Vektor $\overrightarrow{MC}$ als Richtungsvektor.

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 30 & - & 25 \\ 40 & - & 30 \\ 0{,}2 & - & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Nebelwand wird beschrieben durch die Ebene E. Es soll nachgewiesen werden, dass sich der Helikopter nach der Kursänderung **parallel** zur Nebelwand bewegt, d.h. dass die Gerade g **parallel** zur Ebene E liegt. Eine Gerade und eine Ebene verlaufen parallel, wenn der **Richtungsvektor** der Geraden **senkrecht auf den Normalenvektor** der Ebene steht. Das Skalarprodukt von Richtungsvektor und Normalenvektor muss also Null sein. Außerdem darf die Gerade **nicht in der Ebene** liegen.

Der Richtungsvektor der Geraden ist $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, der Normalenvektor der Ebene lässt sich aus der Koordinatengleichung entnehmen: Die Koordinaten des Normalenvektors entsprechen den Koeffizienten a, b und c in der Koordinatengleichung der Ebene, d.h. $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Zeige nun, dass das Skalarprodukt Null ergibt:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot 10 + 10 \cdot (-5) + 0 \cdot 5 = 50 - 50 + 0 = 0$$

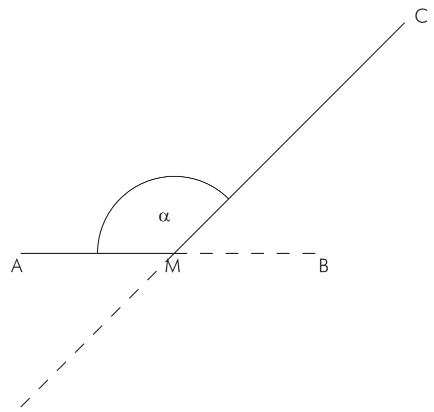
Es ist nachgewiesen, dass die Gerade parallel zur Ebene verläuft. Es besteht nun noch die Möglichkeit, dass die Gerade **in der Ebene** liegt. Zeige deshalb, dass die Gerade **nicht** in der Ebene liegt. Da die beiden parallel verlaufen, genügt es, wenn du zeigst, dass **ein Punkt** der Geraden nicht in der Ebene liegt. Wähle hierzu den Stützvektor der Geraden und setze ihn in die Ebenengleichung ein.

$$\begin{aligned}
10 \cdot 25 - 5 \cdot 30 + 5 \cdot 0{,}2 &= 121 \\
250 - 150 + 1 &= 121 \\
101 &= 121
\end{aligned}$$

Es ergibt sich eine **falsche Aussage**, d.h. der Punkt M liegt **nicht** in der Ebene. Somit liegt auch die gesamte Gerade nicht in der Ebene.

Damit ist gezeigt, dass Gerade und Ebene echt parallel verlaufen. Der Helikopter fliegt also parallel zur Nebelwand.

3. ▶ **Winkel der Kursänderung ermitteln** (6BE)



Die Flugbahn des Helikopters lässt sich zunächst beschreiben durch eine Gerade durch A und B. Anschließend durch eine Gerade durch M und C. Der Winkel der Kursänderung entspricht dem Schnittwinkel der beiden Geraden.

Die Gleichung der Geraden g durch M und C hast du bereits aufgestellt. Stelle noch eine Gleichung der Geraden h durch A und B auf. Wähle den Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ zum Punkt A als Stützvektor und den Vektor $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor.

$$h : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 0,2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 40 & - & 10 \\ 40 & - & 20 \\ 0,2 & - & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 0,2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechne nun den **Schnittwinkel** α der beiden Geraden:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{5 \cdot 30 + 10 \cdot 20}{\sqrt{5^2 + 10^2} \cdot \sqrt{30^2 + 20^2}} = \frac{150 + 200}{\sqrt{125} \cdot \sqrt{1300}}$$

$$= \frac{350}{\sqrt{162500}} \approx \frac{350}{403,11} \approx 0,8682$$

Daraus folgt der Winkel $\alpha = \cos^{-1}(0,8682) \approx 29,74°$.

Der Helikopter ändert im Punkt M seinen Kurs um einen Winkel von etwa $29,74°$.

4. ▶ **Möglichen Zusammenstoß nachweisen** (8BE)

Stelle zunächst wieder zwei Geradengleichungen auf, welche die Kurse der beiden Helikopter beschreiben. Helikopter 1 fliegt von C nach B, Helikopter 2 von E nach F.

$$g_{CB} = \overrightarrow{OC} + r \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 0,2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 40 & - & 30 \\ 40 & - & 40 \\ 0,2 & - & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 0,2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_{EF} = \overrightarrow{OE} + s \cdot \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 55 \\ 60 \\ 0,6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 & - & 55 \\ 30 & - & 60 \\ 0 & - & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 60 \\ 0,6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ -30 \\ -0,6 \end{pmatrix}$$

Ein Zusammenstoß der beiden Helikopter ist grundsätzlich möglich, wenn es einen Schnittpunkt S der beiden Geraden gibt. Setze die beiden Geradengleichungen gleich und ermittle den Schnittpunkt.

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 0,2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 60 \\ 0,6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ -30 \\ -0,6 \end{pmatrix} \quad | - \begin{pmatrix} 55 \\ 60 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 30 & - & 55 \\ 40 & - & 60 \\ 0,2 & - & 0,6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ -30 \\ -0,6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -25 \\ -20 \\ -0,4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ -30 \\ -0,6 \end{pmatrix}$$

Teile diese Gleichung auf in die drei Zeilen und erhalte ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & -25 + 10r & = & -25s & \\ \text{II} & -20 & = & -30s & \Longrightarrow s = \frac{2}{3} \\ \text{III} & -0,4 & = & -0,6s & \Longrightarrow s = \frac{2}{3} \end{array}$$

Setze $s = \frac{2}{3}$ ein in I:

$$\begin{aligned} -25 + 10r &= -\frac{50}{3} && | +25 \\ 10r &= \frac{25}{3} && |: 10 \\ r &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Es ergibt sich sowohl für r als auch für s ein eindeutiger Wert. Damit besitzen die beiden Geraden genau einen gemeinsamen Punkt. Da die beiden Geraden einen Schnittpunkt S aufweisen, kann ein Zusammenstoß der beiden Helikopter grundsätzlich nicht ausgeschlossen werden.

▶ Begründete Stellungnahme

Die Aussage ist allgemein **falsch**. Es ist zwar bekannt, **dass** die beiden Helikopter diesen Kurs fliegen, aber nicht **wann**. Somit sagt der Schnittpunkt der beiden Geraden, also der Kurse, nichts darüber aus, ob die beiden Helikopter **zur gleichen Zeit** an dieser Stelle ankommen.