1.1 **▶ Funktion bestimmen** (7P)

Du weißt, dass die Funktion f allgemein die Gleichung $f(x)) = k \cdot \mathrm{e}^{ax^2}$ besitzt und ihr Graph durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft. Führe mit jedem der Punkte eine Punktprobe durch und du erhältst ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen. Dieses kannst du mit deinem CAS lösen.

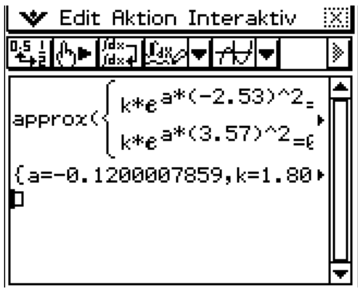
1. Schritt: Gleichungen formulieren

Setze die Koordinaten der Punkte in die Gleichung ein:

(1)	$f(-2{,}53) = 0{,}835$
(2)	$f(3{,}57) = 0{,}39$
(1)	$k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot (-2{,}53)^2} = 0{,}835$
(2)	$k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot (3{,}57)^2} = 0{,}39$

2. Schritt: Gleichungssystem lösen

Löse dieses Gleichungssystem mit deinem CAS. Den Befehl hierfür findest du unter `Keyboard → 2D`.



Du erhältst $k \approx 1{,}8$ und $a \approx -0{,}12$ und damit die Funktionsgleichung

$f(x) = 1{,}8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12x^2}$

1.2 **▶ Maximum nachweisen** (5P)

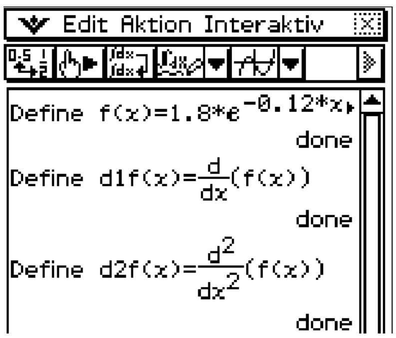
An der Stelle $x = 0$ liegt ein Maximum vor, wenn gilt:

- notwendiges Kriterium: $f'(0) = 0$,
- hinreichendes Kriterium: $f''(0) < 0$

Definiere also die Funktion f sowie die ersten beiden Ableitungen in deinem CAS und zeige, dass die beiden Bedingungen erfüllt sind.

1. Schritt: Funktion und Ableitungen definieren

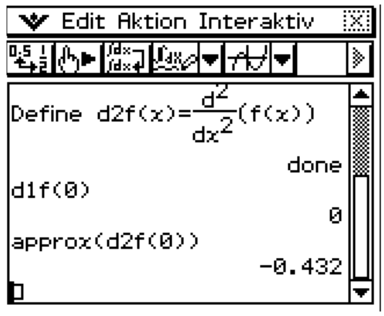
Den Befehl für „Ableiten“ findest du unter `Keyboard → 2D → CALC`. Wir speichern die erste Ableitung als d1f(x) und die zweite als d2f(x).



2. Schritt: Notwendiges und hinreichendes Kriterium untersuchen

Bestimme $f'(0)$ und $f''(0)$ und zeige, dass beide Kriterien erfüllt sind.

Mit dem CAS folgt:
$f'(0) = 0$
$f''(0) = -0,432 < 0.$

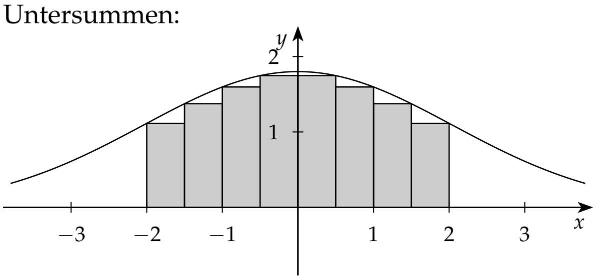


Damit folgt: Sowohl das notwendige als auch das hinreichende Kriterium für ein Maximum bei $x = 0$ erfüllt und du hast die Vermutung bewiesen.

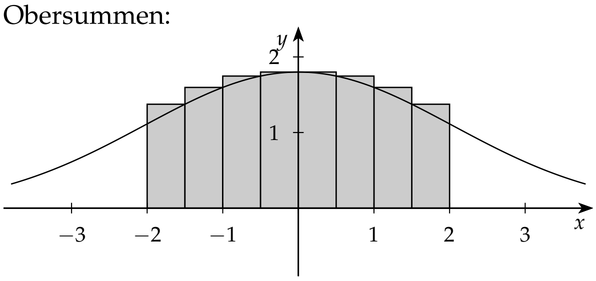
2.1 ► **Inhalt der Fläche näherungsweise bestimmen** (8P)

Der Inhalt des Gaubenfensters ist der Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse zwischen $x = -2$ und $x = 2$ eingeschlossen wird. Eine gute Näherung dieses Inhalts erhältst du über das Obersummen-/Untersummenverfahren. Unterteile dazu die Fläche in 8 Streifen, die je $0,5\,\text{LE}$ breit sind.

Untersummen:



Obersummen:



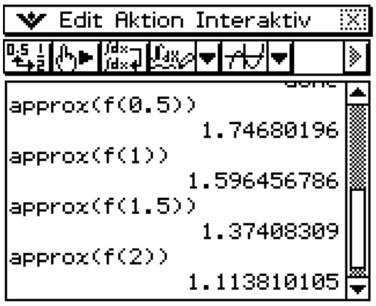
Berechne die Obersumme und die Untersumme und bestimme zuletzt den Mittelwert der beiden Werte, um einen geeigneten Näherungswert für den Flächeninhalt zu erhalten. Wegen der Symmetrie des Graphen von f zur y-Achse kannst du dich dabei jeweils auf eine Hälfte konzentrieren; wir betrachten die **positive** Seite.

1. Schritt: Untersumme berechnen

Es sind die Inhalte von vier Balken zu berechnen. Nutze dazu die Inhaltsformel für Rechtecke, nämlich „Länge Mal Breite". Die Breite aller Balken ist $0,5\,\text{LE}$. Die Länge der Balken ist bestimmt durch den Funktionswert der **rechten** Kante des Balkens. Der Inhalt dieser vier Balken ist die **halbe** Untersumme, also $\frac{1}{2}A_U$.

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}A_{\text{U}} &= 0,5\cdot f(0,5) + 0,5\cdot f(1) + 0,5\cdot f(1,5) + 0,5\cdot f(2)\\ &= 0,5\cdot 1,7468 + 0,5\cdot 1,5965 + 0,5\cdot 1,3741 + 0,5\cdot 1,1138\\ &= 2,9157\end{aligned}$$

Es folgt die Untersumme $A_U = 2\cdot 2,9157 = 5,8314.$

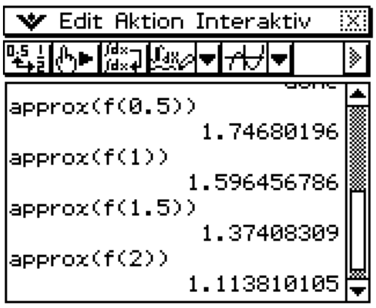


2. Schritt: Obersumme berechnen

Wieder sind die Inhalte von vier Balken zu berechnen. Die Länge der Balken ist nun bestimmt durch den Funktionswert der **linken** Kante des Balkens. Der Inhalt dieser vier Balken ist die **halbe** Obersumme, also $\frac{1}{2}A_O$.

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}A_O &= 0,5\cdot f(0,5)+0,5\cdot f(1)+0,5\cdot f(1,5)+0,5\cdot f(2)\\ &= 0,5\cdot 1,8+0,5\cdot 1,7468+0,5\cdot 1,5965+0,5\cdot 1,3741\\ &= 3,2587\end{aligned}$$

Es folgt die Obersumme $A_O = 2\cdot 3,2587 = 6,5174$.



3. Schritt: Mittelwert bilden

Für den angenäherten Inhalt A der Fläche ergibt sich jetzt:

$$\begin{aligned}A &= \frac{A_U + A_O}{2}\\ &= \frac{5,8314+6,5174}{2}\\ &= 6,1744\end{aligned}$$

Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt näherungsweise 6,1744 FE.

2.2 ▶ **Prozentuale Abweichung berechnen** (5P)

Du sollst die prozentuale Abweichung des Näherungswertes **vom** Wert des Computerprogramms berechnen. Der Wert $6,1966\,\text{m}^2$ aus der Aufgabenstellung ist also der Grundwert.

$$p\,\% = \frac{6,1744}{6,1966}\cdot 100\,\% \approx 99,64\,\%$$

Für die prozentuale Abweichung ergibt sich dann:

$100\,\% - 99,64\,\% = 0,36\,\%$.

Der Näherungswert weicht um etwa 0,36 % vom Wert des Computerprogramms ab.

▶ Möglichkeit für verbessertes Ergebnis erläutern

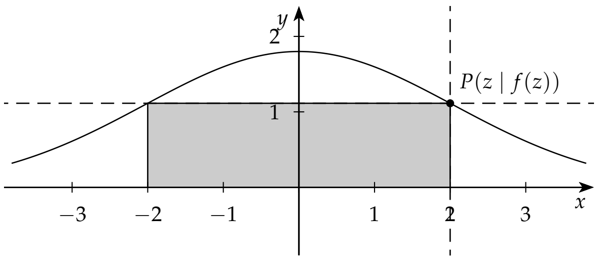
Überlege, welche anderen geometrischen Figuren anstelle des Rechtecks gewählt werden können, damit weniger „Verschnitt“ anfällt.

Beim Rechteck ist immer das Problem, dass es immer ein Flächenstück gibt, das entweder fehlt oder übersteht. Dieses Flächenstück kann verkleinert werden, wenn anstelle des Rechtecks zum Beispiel **Trapeze** gewählt werden.

Das daraus resultierende Sehnentrapezverfahren liefert dann genauere Ergebnisse.

3.1 **▶ Bedeutung der Funktion A erläutern** (3P)

In der Aufgabenstellung ist die Abbildung in Material 3 als Hinweis gegeben. In diesem Material siehst du ein Rechteck, das dem Graphen von f **einbeschrieben** ist. Dieses Rechteck ist wie der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse. Überlege dir, wie du den Flächeninhalt dieses Rechtecks berechnen kannst und welche Bedeutung dem Wert z in diesem Kontext zukommt.



Für den Flächeninhalt A eines Rechtecks gilt allgemein: $A = a \cdot b$, wobei a und b die Länge bzw. die Breite sind. In unserem Fall werden beide durch die Koordinaten von P beschrieben:

Die x-Koordinate $x = z$ ist die **Hälfte** der Länge, also gilt für die Länge des Rechtecks: $a = 2 \cdot z$.

Die y-Koordinate $y = f(z)$ ist die **Breite**.

Für den Flächeninhalt A ergibt sich dann:

$A = a \cdot b = 2 \cdot z \cdot f(z)$

Setze den Funktionsterm von f ein:

$A(z) = 2 \cdot z \cdot 1,8 \cdot \mathrm{e}^{-0,12z^2}$

Damit kannst du sagen: Die Funktion A gibt dir den Flächeninhalt des einbeschriebenen Rechtecks in Abhängigkeit von Punkt P an.

3.2 **▶ Maße für maximalen Flächeninhalt berechnen** (6P)

Die Funktion A beschreibt den Flächeninhalt in Abhängigkeit des Punktes P. Der Flächeninhalt wird maximal, wenn die Funktion A ihr Maximum annimmt.

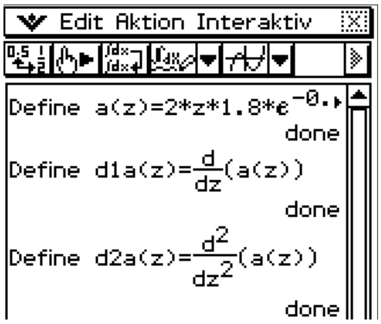
Berechne also das Maximum x_M von A. Dieses liegt an der Stelle vor, an der gilt:

- $A'(x_M) = 0$
- $A''(x_M) \neq 0$

Bestimme die erste und die zweite Ableitung von A und löse dann die Gleichung $A'(x) = 0$, um die lokale Extremstelle zu bestimmen. Berechne zuletzt die vollständigen Koordinaten des Hochpunktes und die Seitenlängen des Rechtecks.

1. Schritt: Funktion und Ableitungen definieren

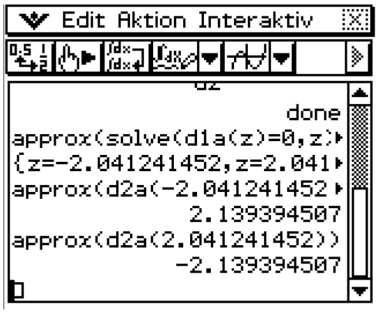
Den Befehl für „Ableiten" findest du unter $\boxed{\texttt{Keyboard} \rightarrow \texttt{2D} \rightarrow \texttt{CALC}}$. Wir speichern die erste Ableitung als d1a(z) und die zweite als d2a(z).



2. Schritt: Notwendiges und hinreichendes Kriterium untersuchen

Löse die Gleichung $A'(z) = 0$ und erhalte so die potentiellen Extremstellen.

Das CAS liefert die lokalen Extremstellen $z_1 \approx -2{,}04$ und $z_2 \approx 2{,}04$.
Wegen $A''(2{,}04) = -2{,}14 < 0$ liegt an dieser Stelle das lokale Maximum vor.

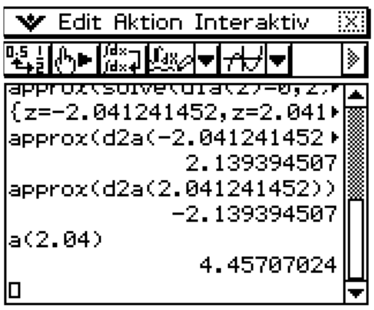


3. Schritt: y-Koordinate berechnen

Berechne mit $A(2{,}04)$ die zugehörige y-Koordinate:

Das CAS liefert $A(2{,}04) \approx 4{,}46$.

Damit weißt du: Das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt hat den Flächeninhalt 4,46 m^2.



Du weißt aus dem ersten Teil der Aufgabe: Für die Länge a und die Breite b des Dreiecks gilt:
$a = 2 \cdot z$ und $b = f(z)$.
Einsetzen ergibt:
$a = 2 \cdot 2{,}04 = 4{,}08 \quad \text{und} \quad b = f(2{,}04) = 1{,}09.$

Das Dreieck mit maximalem Flächeninhalt 4,46 m^2 hat die Länge 4,08 m und die Breite 1,09 m.

4. **► Ortskurve der Wendepunkte berechnen** (6P)

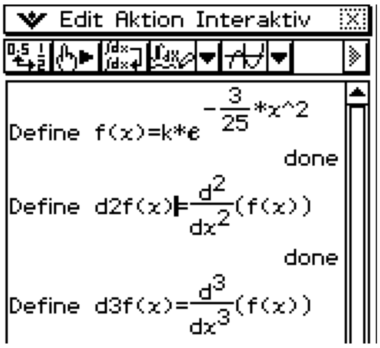
Gesucht ist die Gleichung der Funktion, auf deren Graph alle Wendepunkte der Graphen von f_k liegen. Bestimme zunächst die Koordinaten der Wendepunkte und ermittle anschließend die Gleichung der Ortskurve.

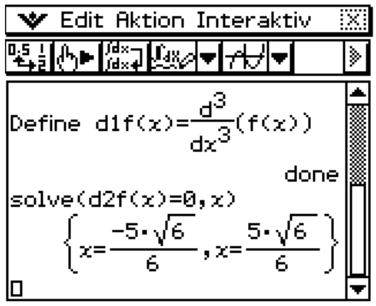
1. Schritt: Koordinaten der Wendepunkte berechnen

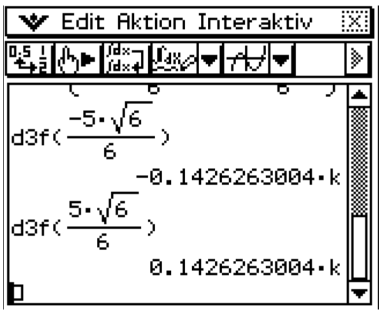
Ein Wendepunkt des Graphen von f_k liegt an einer Stelle x_W vor, wenn gilt

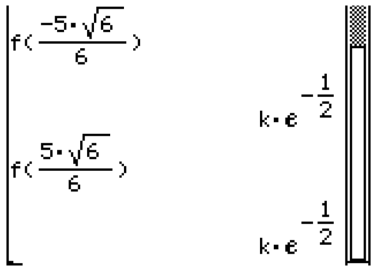
- notwendiges Kriterium: $f_k''(x_W) = 0$
- hinreichendes Kriterium: $f_k'''(x_W) \neq 0$

Bilde also zunächst die zweite und die dritte Ableitung von f_k'' und f_k'''. Setze dann $f_k''(x) = 0$, um die potentiellen Wendestellen zu finden und untersuche das hinreichende Kriterium.









Mit dem CAS ergeben sich die potentiellen Wendestellen

$$x_1 = -\frac{5\sqrt{6}}{6} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Die dritte Ableitung ist an beiden Stellen nicht Null, weil $k > 0$ ist:

$$f_k'''\left(-\frac{5\sqrt{6}}{6}\right) = -0{,}14263 \cdot k \quad \text{und} \quad f_k'''\left(-\frac{5\sqrt{6}}{6}\right) = 0{,}14263 \cdot k$$

Betrachte zuletzt die zugehörigen y-Koordinaten der Wendepunkte

$$f_k\left(-\frac{5\sqrt{6}}{6}\right) = ke^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad f_k\left(\frac{5\sqrt{6}}{6}\right) = ke^{-\frac{1}{2}}$$

Also haben die Graphen von f_k die Wendepunkte $W_1\left(-\frac{5\sqrt{6}}{6} \mid ke^{-\frac{1}{2}}\right)$ und $W_2\left(\frac{5\sqrt{6}}{6} \mid ke^{-\frac{1}{2}}\right)$.

2. Schritt: Gleichung der Ortskurve berechnen

Betrachte die Koordinaten der Wendepunkte: Die x-Koordinate ist **unabhängig** von k. Also liegen alle Wendepunkte auf den Geraden
$x = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$ und $x = \frac{5\sqrt{6}}{6}$.
Beide Geraden verlaufen parallel zur y-Achse.