a) **► Fehlenden Tabellenwert für 1990 berechnen** (14P)

In der Tabelle sind angegeben:

- Die Anzahl der Wahlberechtigten
- Die Anzahl der Wähler
- Die Wahlbeteiligung in %.

Du weißt aus dem Aufgabentext zudem: die Wahlbeteiligung gibt dir den prozentualen Anteil der Wahlberechtigten an, die tatsächlich zur Wahl gegangen sind. Anders formuliert: Die Anzahl der Wahlberechtigten ist der Grundwert, die Anzahl der Wähler ist der Prozentwert und die Wahlbeteiligung ist der Prozentsatz. Berechne also 77,8 % von 60,4 Millionen:

$60,4\,\text{Millionen} \cdot 0,778 = 46,9912\,\text{Millionen} \approx 47\,\text{Millionen}.$

Im Jahr 1990 gab es 47 Millionen Wähler.

► Fehlende Werte für 2005 berechnen

Aus der Aufgabenstellung ist bekannt: von 1990 bis 2009 ist der Mittelwert der Anzahlen der Wahlberechtigten 61,2 Millionen. Den Mittelwert dieser sechs Anzahlen kannst du berechnen, indem du die Anzahlen zunächst **addierst** und dann durch **sechs teilst**.
In der Spalte für 2005 fehlt die Anzahl der Wahlberechtigten und die Wahlbeteiligung. Bekannt ist die Anzahl der Wähler. Du kannst so vorgehen:

- Bezeichne die Anzahl der Wahlberechtigten in 2005 mit x. Du weißt, dass er Mittelwert dieser Anzahlen 61,2 Millionen betragen soll. Berechne also den Mittelwert, setze ihn gleich 61,2 Millionen und löse nach x auf.
- Die Wahlbeteiligung gibt dir an, wie viel Prozent der Wahlberechtigten wirklich gewählt haben. Berechne also, welchem prozentualen Anteil an der Anzahl der Wahlberechtigten die Anzahl der Wähler entspricht.

1. Schritt: Anzahl der Wahlberechtigten bestimmen

Setze für den Wert bei 2005 eine Variable ein, z.B. x. Du weißt, dass der Mittelwert 61,2 Millionen betragen soll. Aus Übersichtlichkeitsgründen lassen wir das „Millionen" in der Rechnung jeweils weg. Es muss gelten:

$$\begin{aligned}\frac{60,4+60,5+60,8+61,4+x+62,2}{6} &= 61,2 \\ \frac{305,3+x}{6} &= 61,2 \qquad \mid \cdot 6 \\ 305,3+x &= 367,2 \qquad \mid -305,3 \\ x &= 61,9\end{aligned}$$

Im Jahr 2005 gab es 61,9 Millionen Wahlberechtigte.

2. Schritt: Wahlbeteiligung berechnen

Insgesamt gab es 61,9 Millionen Wahlberechtigte, von denen laut Tabelle 48,1 Millionen zur Wahl gegangen sind. Berechne den prozentualen Anteil der Wähler:

$$p\,\% = \frac{48,1\,\text{Millionen}}{61,9\,\text{Millionen}} \cdot 100\,\% \approx 77,7\,\%.$$

Die Wahlbeteiligung lag im Jahr 2005 bei etwa 77,7 %.

► Prozentualen Anteil der Nichtwähler in 2009 berechnen

Betrachte die Tabelle: die Wahlbeteiligung gibt den Prozentsatz p_W % der Wähler an. Für den Prozentsatz p_N % der Nichtwähler gilt also:

$p_N = 100 - p_W$.

Es folgt: Im Jahr 2009 lag der Anteil der Nichtwähler bei $100\,\% - 70,7\,\% = 29,3\,\%$.

► Aussage des Artikels beurteilen

Laut Artikel bildeten die Nichtwähler die „stärkste Partei"; es muss also mehr Nichtwähler als CDU/CSU-Wähler gegeben haben. Für die CDU und CSU ist angegeben, dass sie auf 33,2 % der Stimmen kamen. „Stimmen" heißt aber: „Wähler". Insgesamt haben also 33,2 % der Wähler für die CDU/CSU gestimmt. Der Anteil der Nichtwähler bezieht sich aber auf die Wahlberechtigten. Ermittle also, wie viel Prozent der Wahlberechtigten für die CDU/CSU gestimmt haben und vergleiche dann. Alternativ kannst du auch berechnen, wie viele Personen insgesamt für die CDU/CSU gestimmt haben und dann die absoluten Zahlen vergleichen.

Der Anteil der Wähler lag 2009 bei 70,7 %. Von diesen 70,7 % haben 33,2 % für die CDU/CSU gestimmt. Das heißt also:

$0,707 \cdot 0,332 \approx 0,2347$

23,47 % der Wahlberechtigten haben ihre Stimme für die CDU/CSU abgegeben. Dies sind weniger als 29,3 %. Also ist die Aussage des Artikels richtig.

Alternativ: Absolute Werte vergleichen

Im Jahr 2009 gab es 44 Millionen Wähler. Von diesen haben 33,2 % für die CDU/CSU abgestimmt. Dies sind insgesamt:

$44\,\text{Millionen} \cdot 0,332 \approx 14,6$.

Es gab also etwa 14,6 Millionen Personen, die für die CDU/CSU abgestimmt haben. Im Vergleich dazu gab es aber 18,2 Millionen Nichtwähler. Also ist die Aussage des Artikels richtig.

b) **► Vertrauensintervall bestimmen** (9P)

Sei X zunächst die Anzahl der Wähler in der Stichprobe. X kann näherungsweise als **binomialverteilte** Zufallsgröße angenommen werden mit $n = 15.320$ und p unbekannt. Einen ersten Schätzwert für p kannst du über die Angabe ermitteln, dass im Schnitt 72,4 % der Wahlberechtigten zur Wahl gegangen sind. Dies ist der prozentuale Anteil der Wähler, d.h.:

$\dfrac{X}{n} = 0,724$.

Gesucht ist nun ein Intervall, in dem der tatsächliche Anteil p der Wähler mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt. Einen Ansatz für dieses Problem bieten die σ-Regeln. Diese dürfen angewandt werden, wenn das Laplace-Kriterium $\sigma > 3$ erfüllt ist. Tatsächlich ergibt sich z.B. mit dem Schätzwert $0,724$ für p die Standardabweichung

$\sigma = \sqrt{15.320 \cdot 0,724 \cdot (1 - 0,724)} \approx 55,33 > 3$.

Selbstverständlich kann dies nur als Näherung gesehen werden. Tendenziell kann aber davon ausgegangen werden, dass die Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist.

Du kannst also so vorgehen:

- Wähle die σ-Regel, welche eine Aussage über ein 95 %-Konfidenzintervall um den **Erwartungswert** μ macht.
- Bedenke: $\mu = n \cdot p$. Forme den Ausdruck in der σ-Regel also so um, dass er eine Aussage über p macht. Hieraus ergibt sich: $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 1{,}96\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right) \leq 0{,}95$.
- Löse die Ungleichung nach p auf und berechne so die Grenzen des Intervalls.

1. Schritt: σ-Regel auswählen

Du findest die Regel
$P(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$

2. Schritt: Ausdruck umformen

Betrachte nur den Ausdruck in Klammern und forme ihn so um, dass er eine Aussage über p macht. Du kennst bereits:

- $n = 15.320$
- $\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$
- die relative Häufigkeit $\frac{X}{n} = 0{,}724$

$$\begin{aligned}
\mu - 1{,}96\sigma \leq\ & X \leq \mu + 1{,}96\sigma && \mid\ \mu = n\cdot p\\
n\cdot p - 1{,}96\sigma \leq\ & X \leq n\cdot p + 1{,}96\sigma && \mid\ \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}\\
n\cdot p - 1{,}96\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} \leq\ & X \leq n\cdot p + 1{,}96\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} && \mid\ :n\\
p - 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \leq\ & \frac{X}{n} \leq p + 1{,}96\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} && \mid\ -p\\
-1{,}96\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \leq\ & \frac{X}{n} - p \leq 1{,}96\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\\
\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq\ & 1{,}96\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} && \mid\ \frac{X}{n} = 0{,}724;\quad n = 15.320\\
|0{,}724 - p| \leq\ & 1{,}96\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{15.320}}
\end{aligned}$$

3. Schritt: Ungleichung lösen

Du kannst auf beiden Seiten **quadrieren** und die Ungleichung nach nach p auflösen.

$$\begin{aligned}
|0{,}724 - p| &\leq 1{,}96\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{15.320}} && \mid\ (\ )^2\\
(0{,}724 - p)^2 &\leq (1{,}96)^2\cdot\frac{p\cdot(1-p)}{15.320}\\
0{,}724^2 - 2\cdot 0{,}724\cdot p + p^2 &\leq \frac{3{,}8416}{15.320}\cdot p\cdot(1-p)\\
0{,}724^2 - 2\cdot 0{,}724\cdot p + p^2 &\leq \frac{3{,}8416}{15.320}p - \frac{3{,}8416}{15.320}p^2 && \mid\ -\frac{3{,}8416}{15.320}p + \frac{3{,}8416}{15.320}p^2
\end{aligned}$$

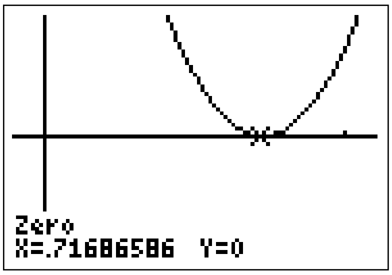
$$p^2 + \frac{3{,}8416}{15.320}p^2 - 2\cdot 0{,}724\cdot p - \frac{3{,}8416}{15.320}p + 0{,}724^2 \leq 0$$

Fasse den Ausdruck links vom Gleichheitszeichen als Funktionsterm $f(p)$ einer Funktion f auf. Der Graph von f ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Gesucht ist der Bereich, in welchem f **negative** Funktionswerte annimmt, d.h. der Bereich, in dem die Parabel unterhalb der x-Achse verläuft. Du kannst diese Ungleichung grafisch lösen:

Zeichne den Graphen von f und berechne mit `2nd → TRACE (CALC) → Zero` die Nullstellen von f. Sie sind die Grenzen deines Intervalls.

Der GTR liefert die Werte $p_1 = 0{,}7169$ und $p_2 = 0{,}7310$.



Damit folgt: der tatsächliche Anteil p der Wähler liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % im Intervall $[0{,}7169\,;\,0{,}7310]$.

▶ Mögliche Ursachen für die Abweichung nennen

Die tatsächliche Wahlbeteiligung von 0,707 ist nicht im Vertrauensintervall enthalten. Überlege dir, wie der tatsächliche Wert 0,707 und wie der Schätzwert 0,724 und das Vertrauensintervall zustande kommen:

- Für den Schätzwert wird mit 15.320 Personen eine **kleine Gruppe** befragt, von der aus dann auf alle Wähler geschlossen wird. Wie muss eine solche Gruppe von Menschen ausgewählt sein?
- Das Vertrauensintervall ist direkt an diesen ermittelten Wert gekoppelt.
- Der tatsächliche Wert zieht **alle** Wahlberechtigten und **alle** Wähler in Betracht.

Eine mögliche Ursache kann sein, dass die Gruppe von 15.320 Personen einfach nicht repräsentativ ausgewählt war und somit das tatsächliche, allgemeine Wählerverhalten der Deutschen 2009 nicht wiederspiegelt.

Wenn dies der Fall ist, dann ist auch das Vertrauensintervall, weil es auf diesem Wert basiert, nicht repräsentativ und nicht aussagekräftig für alle Wähler.

Alternativ kannst du auch sagen: Insgesamt ist der tatsächliche Prozentsatz nur in 95 % der Vertrauensintervalle enthalten. Es kann also auch sein, dass das Vertrauensintervall zufällig nicht den Wert $p = 0{,}707$ überdeckt. In diesem Fall liegen die Ursachen also in der Zufälligkeit und nicht in einer methodologischen Schwäche.

c) ▶ **Aussage beurteilen** (7P)

Wenn man sich etwas vom Kontext löst, so ist folgende Aussage zu beurteilen: der Stichprobenumfang wird von 15.320 verdoppelt auf 30.640. Die Behauptung ist nun, dass sich dann die Länge des Vertrauensintervalls halbiert. Du kannst also so vorgehen:

- Die Wahl des Schätzwertes $\frac{X}{n}$ hat nur Einfluss auf die **Lage**, nicht jedoch auf die **Länge** des Vertrauensintervalls. Wähle also $n = 30.640$ und behalte den Schätzwert $p = 0{,}724$ bei.
- Berechne mit diesen neuen Werten die Grenzen des neuen Vertrauensintervalls.
- Berechne die Länge des alten und des neuen Vertrauensintervalls und vergleiche (Lösungsweg A).
- *Alternativ* kannst du auch allgemein über den Ansatz begründen (Lösungsweg B).

▶▶ Lösungsweg A: Vertrauensintervall berechnen und Länge vergleichen

1. Schritt: Neues Vertrauensintervall bestimmen

Du kannst einige Schritte, die du bereits zur Berechnung des ersten Vertrauensintervalls durchgeführt hast, überspringen. Außer dem Wert für n ändert sich nichts. Du kannst also überall die Zahl „15.320“ durch die Zahl „30.640“ ersetzen.

Betrachte also die letzte Zeile, bevor der GTR zum Einsatz kam und ersetze hier den Stichprobenumfang. Du erhältst dann:

$$p^2 + \frac{3{,}8416}{30.640}p^2 - 2 \cdot 0{,}724 \cdot p - \frac{3{,}8416}{30.640}p + 0{,}724^2 \leq 0$$

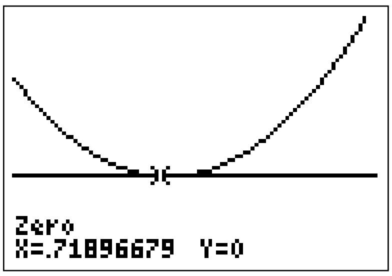
Gehe nun vor wie oben.

Fasse den Ausdruck links vom Gleichheitszeichen als Funktionsterm $f(p)$ einer Funktion f auf. Der Graph von f ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Gesucht ist der Bereich, in welchem f **negative** Funktionswerte annimmt, d.h. der Bereich, in dem die Parabel unterhalb der x-Achse verläuft. Du kannst diese Ungleichung grafisch lösen:

Zeichne den Graphen von f und berechne mit `2nd → TRACE (CALC) → Zero` die Nullstellen von f. Sie sind die Grenzen deines Intervalls.

Der GTR liefert die Werte $p_1 = 0{,}7189$ und $p_2 = 0{,}7289$.



Damit folgt: der tatsächliche Anteil p der Wähler liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % im Intervall $[0{,}718\,;\,0{,}728]$.

2. Schritt: Länge der Intervalle vergleichen

Die Länge des Intervalls ist gerade die Differenz zwischen oberer und unterer Grenze. Für das alte Vertrauensintervall ergibt sich die Länge:

$0{,}7310 - 0{,}7169 = 0{,}0141.$

Für das neue Intervall ergibt sich die Länge:

$0,728 - 0,718 = 0,01$

Du erkennst direkt, dass der untere Wert nicht die Hälfte des oberen Wertes ist. Die Länge des Intervalls hat zwar verkleinert, aber **nicht** halbiert.

Deshalb ist die Aussage falsch.

►► Lösungsweg B: Allgemein über den Ansatz begründen

Oben hast du für die Berechnung des Vertrauensintervalls folgenden Ansatz verwendet:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 1,96\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right) \leq 0,95$$

Dabei ist $\left|\frac{X}{n} - p\right|$ gerade der Abstand des Schätzwertes $\frac{X}{n}$ vom tatsächlichen Wert p. Dieser Abstand soll maximal $1,96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$ betragen. Also ist der letzte Ausdruck der **Radius** des Vertrauensintervalls.

Die Länge des Vertrauensintervalls ist genau der **doppelte Radius**, d.h. $L = 2 \cdot 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$.

Die Aussage behauptet: Wenn wir den Stichprobenumfang n verdoppeln zu $2n$, dann halbiert sich die Länge des Intervalls. Die Länge L des Vertrauensintervalls für den Stichprobenumfang n hast du eben bestimmt. Setze nun $(2n)$ in diese Formel ein und berechne so die Länge L_{2n} des Vertrauensintervalls mit verdoppeltem Stichprobenumfang. Vergleiche dann, ob der zweite Wert halb so groß ist wie der erste:

$$\begin{aligned}
L_{2n} &= 2 \cdot 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{2n}} \\
&= 2 \cdot 1,96 \cdot \frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{2n}} \\
&= 2 \cdot 1,96 \cdot \frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n}} \\
&= 2 \cdot 1,96 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 1,96 \cdot \frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} \cdot 1,96 \cdot \frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} \\
&= \sqrt{2} \cdot 1,96 \cdot \frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Vergleiche nun die beiden Längen. Hätte sich die Länge des Vertrauensintervalls halbiert durch die Verdopplung von n, so hätte sich nun ergeben müssen: $1,96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{2n}}$.

Tatsächlich ergibt sich aber $\sqrt{2} \cdot 1,96 \cdot \frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}$.

Die Länge des Intervalls halbiert sich also nicht, wenn der Stichprobenumfang verdoppelt wird.