2.1 **► Darstellung im Koordinatensystem** (7P)

Die Darstellung des Kanalquerschnitts in einem Koordinatensystem soll laut Aufgabenstellung aus drei Teilen bestehen:

1. der Randkurve des Kanalquerschnitts,
2. der Geraden des Normalpegels auf der $x$-Achse und
3. den Kanalbegrenzungen über Wasser, die tangential an die Randkurve gesetzt werden.

Die Funktionsgleichung der Randkurve ist gegeben. Ihr Definitionsbereich beschränkt sich allerdings so, dass die Kurve dauerhaft im negativen $y$-Bereich verläuft, also unter dem Wasserspiegel. Er ist also durch die Schnittpunkte $N_1$ und $N_2$ mit der $x$-Achse begrenzt.
Auf der $x$-Achse haben alle Punkte die $y$-Koordinate Null. Für $N_1$ und $N_2$ gilt daher:

$f(x) = 0$

Die Gerade des Normalpegels ist identisch mit der $x$-Achse und kann sofort eingezeichnet werden. Da alle Punkte auf der $x$-Achse die $y$-Koordinate Null besitzen, lautet ihre Gleichung somit:

$y = 0$

Die Kanalbegrenzungen sind abhängig von $N_1$ und $N_2$, da sie in diesen Punkten ansetzen. Zudem führen sie die Randkurve tangential fort, das heißt, sie haben die gleiche Steigung wie die Punkte, mit denen die Randkurve endet - also wiederum $N_1$ und $N_2$.
Kurz: Die Kanalbegrenzungen werden durch Tangenten an $f$ in $N_1$ und $N_2$ dargestellt.
Ihre Gleichungen lassen sich über die Tangentenformel ermitteln. Diese lautet:

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Sind die Tangentengleichungen bestimmt, dürfen nur die Punkte der Geraden eingezeichnet werden, deren $y$-Koordinaten den Wert $1,8$ nicht überschreiten. Dies ist laut Aufgabenstellung die Auslegung der Begrenzungen.

Er sind also insgesamt drei Schritte nötig:

1. Schnittpunkte von $f$ mit der $x$-Achse bestimmen.
2. Die Tangentengleichungen der Kanalbegrenzungen ermitteln.
3. Randkurve, Normalpegel und Kanalbegrenzungen in das Koordinatensystem einzeichnen.

**1. Schritt: Schnittpunkte von $f$ mit der $x$-Achse bestimmen**

Für die Schnittstellen von $f$ mit der $x$-Achse gilt

$f(x) = 0.$

Setze die Funktionsvorschrift in die Gleichung ein und ermittle die $x$-Koordinaten von $N_1$ und $N_2$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
0,0125x^4 - 3,2 &= 0 && \mid +3,2 \\
0,0125x^4 &= 3,2 && \mid :0,0125 \\
x^4 &= 256 && \mid \sqrt{\phantom{x}} \\
x^2 &= \pm\sqrt{256} \\
x_{1,2}^2 &= +16 && \mid \sqrt{\phantom{x}} \\
x_{3,4}^2 &= -16 && \text{Nicht definiert - keine Lösung!} \\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{16} \\
\mathbf{x_2} &= \mathbf{4} && \text{Probe: } f(4) = 0 \\
\mathbf{x_1} &= \mathbf{-4} && \text{Probe: } f(-4) = 0
\end{aligned}$$

Die Randkurve des Kanalquerschnitts schneidet die $x$-Achse bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$. Die Schnittpunkte haben damit die Koordinaten

$N_1(-4\,|\,0)$ und $N_2(4\,|\,0)$.

**2. Schritt: Die Tangentengleichungen der Kanalbegrenzungen ermitteln**

Eine Tangente einer Kurve in einem bestimmten Punkt hat die Form

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Die Tangenten der Kurve von $f$ in $N_1(-4\,|\,0)$ und $N_2(4\,|\,0)$ lauten dann:

$$t_1:\; y = f'(x_1) \cdot (x - x_1) + f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1) + 0 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

$$t_2:\; y = f'(x_2) \cdot (x - x_2) + f(x_2) = f'(x_2) \cdot (x - x_2) + 0 = f'(x_2) \cdot (x - x_2)$$

Um die Tangentengleichung eindeutig zu definieren, wird die Gleichung der ersten Ableitung von $f$ benötigt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0,0125x^4 - 3,2 \\
f'(x) &= 4 \cdot 0,0125x^3 \\
&= 0,05x^3
\end{aligned}$$

Setze den Funktionsterm und die Werte für $x_1$ und $x_2$ in die Tangentengleichungen ein und vereinfache:

$$\begin{aligned}
(t_1)\quad y &= f'(x_1) \cdot (x - x_1) \\
y &= (0,05 \cdot (-4)^3) \cdot (x - (-4)) \\
y &= (0,05 \cdot (-64)) \cdot (x + 4) \\
\mathbf{(t_1)}\quad \mathbf{y} &= \mathbf{-3,2x - 12,8}
\end{aligned}$$

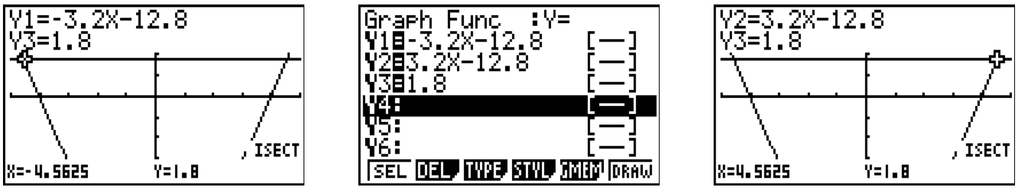
$$\begin{aligned}
(t_2)\quad y &= f'(x_2) \cdot (x - x_2) \\
y &= (0,05 \cdot 4^3) \cdot (x - 4) \\
y &= (0,05 \cdot 64) \cdot (x - 4) \\
\mathbf{(t_2)}\quad \mathbf{y} &= \mathbf{3,2x - 12,8}
\end{aligned}$$

**3. Schritt: Randkurve, Normalpegel und Kanalbegrenzungen einzeichnen**

Die Randkurve und der Normalpegel werden innerhalb der Kanalgrenzen zwischen $x_1$ und $x_2$ gezeichnet. Die Begrenzungen werden dargestellt, solange die Funktionswerte die Höhe der Begrenzungen von $1,8\,\text{m}$ nicht überschreiten.

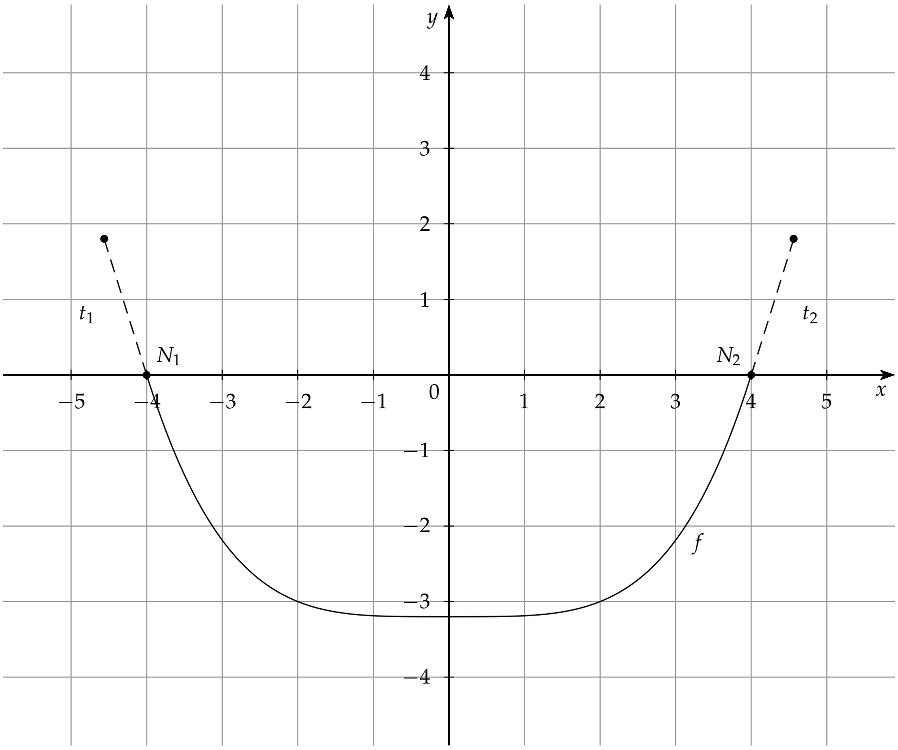
Die Stellen, an denen dieser Fall für die Tangenten eintreten, lassen sich mit dem GTR berechnen. Füge dazu die Tangentengleichungen in den $\boxed{\texttt{Y=}}$-Editor ein und zeichne die Schaubilder. Füge ebenso eine Parallele zur $x$-Achse mit dem Wert $1,8$ ein.

Bestimme jeweils über die Befehlsfolge $\boxed{\texttt{SHIFT} \rightarrow \texttt{F5} \rightarrow \texttt{F5}}$ die Schnittstellen der Tangenten mit der Parallelen. An diesen Stellen erreichen Begrenzung die Höhe 1,8 m.




Bei $x_{t1} = -4,5625$ und bei $x_{t2} = 4,5625$ erreichen die jeweiligen Geraden den Funktionswert 1,8. So darf $t_1$ nun nur noch im Intervall $[-4,5625; -4]$ gezeichnet werden und $t_2$ nur noch im Intervall $[4; 4,5625]$.

Zeichne nun Randkurve, Normalpegel und Kanalbegrenzungen in ein gemeinsames Koordinatensystem ein:




### 2.2.1 ▶ Wassservolumen pro Sekunde (4P)

Gesucht ist das Wasservolumen, das pro Sekunde durch den Kanalquerschnitt fließt. Die Fließgeschwindigkeit des Wassers beträgt 1,3 m pro Sekunde. Das bedeutet, dass innerhalb einer Sekunde ein 1,3 m langer Wasserabschnitt den Ort der Strömungsmessung passiert.

Die Länge dieses Wasserabschnitts ist gleichsam die Höhe eines Prismas, dessen Grundfläche der Querschnitt des Kanals darstellt. Das Volumen des Prismas ist demnach das Volumen, das innerhalb einer Sekunde bei Normalpegel durch den Kanalquerschnitt fließt.

Für das gesuchte Volumen $V$ gilt also die Volumenformel eines Prismas mit der Grundfläche $G$ und der Höhe $h$:

$V = G \cdot h$

Die Höhe ist bekannt. Sie beträgt $h = 1{,}3\,\mathrm{m}$. Die Grundfläche dagegen bildet bei Normalpegel die von der $x$-Achse und dem Schaubild von $f$ eingeschlossene Fläche.

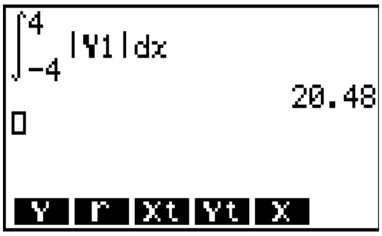
Eine solche Fläche wird über den Betrag des Integrals der Funktion $f$ innerhalb desjenigen Intervalls $[a;b]$ bestimmt, innerhalb dessen sich die gesuchte Fläche befindet. Die allgemeine Formel für eine Fläche $A$ unter einer Kurve lautet daher:

$$A = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

In unserem Fall liegt das Intervall zwischen den bereits ermittelten Schnittstellen mit der $x$-Achse $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$. Die Formel für die Grundfläche $G$ lautet somit:

$$G = \int_{-4}^{4} \left|0{,}0125x^4 - 3{,}2\right|\,\mathrm{d}x$$

Berechne $G$ mithilfe deines GTR. Gib dazu die Funktionsvorschrift von $f$ in den `Y=`-Editor ein und verlasse diesen anschließend. Füge dann über `MENU → 1 → F4 → F6 → F1` das Integral ein. Mit dem Befehl `VARS → F4` kannst du die Funktionsgleichung eingeben, mit `F4 → F3` setzt du den Betrag.




Der Inhalt der Grundfläche $G$ beträgt $20{,}48\,\mathrm{m}^2$.

Bestimme nun über die Formel für das Volumen eines Prismas die Menge Wasser, die innerhalb einer Sekunde den Kanalquerschnitt passiert.

$V = G \cdot h = 20{,}48 \cdot 1{,}3 = 26{,}624$

Es fließen damit $26{,}624\,\mathrm{m}^3$ pro Sekunde bei Normalpegel durch den Kanalquerschnitt.

### 2.2.2 ▶ Bestimmung des neuen Wasserpegels (4P)

Gesucht ist der neue, niedrigere Wasserstand, der sich ergibt, wenn bei gleicher Strömungsgeschwindigkeit nur noch 80 % der Wassermenge pro Sekunde fließen. Das neue Wasservolumen, das innerhalb einer Sekunde durch den Kanalwuerschnitt fließt beträgt damit

$V_n = 80\% \cdot V_{GES}$

Für das zuvor berechnete Wasserprisma gilt aus diesen Angaben heraus, dass die Höhe wegen der Strömungsgeschwindigkeit konstant bleibt, sie beträgt immer noch

$h = 1{,}3\,\mathrm{m}$

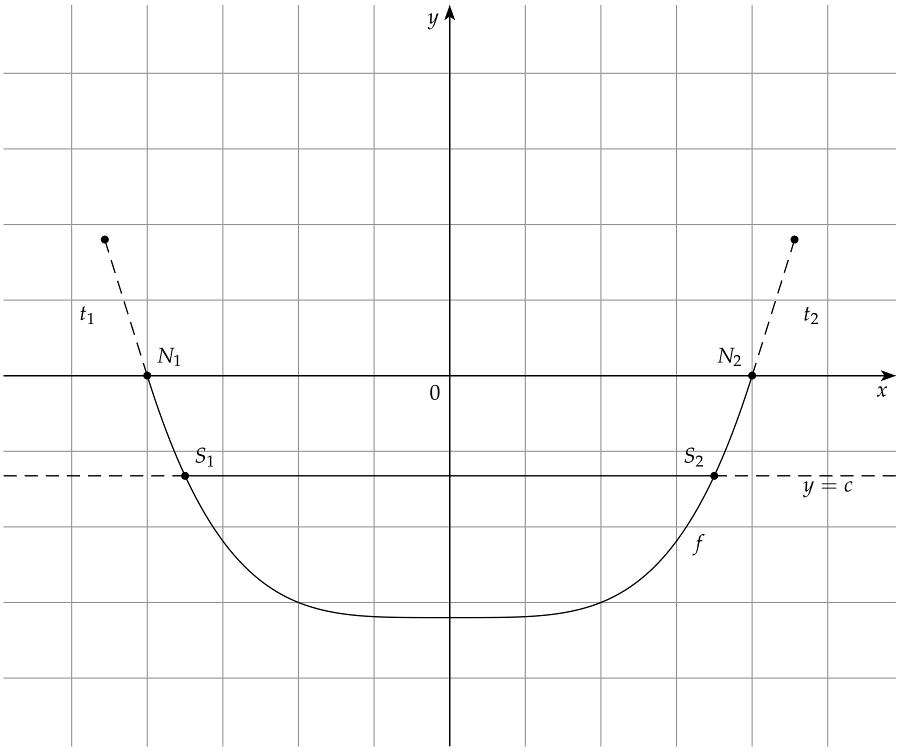
Die Grundfläche ändert sich dagegegen. Für das neue Volumen gilt also ebenfalls:

$V_n = G_n \cdot h$

Die Grundfläche ändert sich dadurch, dass der Wasserspiegel sinkt. Die Grundfläche ist nun nicht mehr zwischen dem Schaubild von $f$ und der $x$-Achse eingeschlossen, sondern zwischen dem Schaubild und einer Parallelen zur $x$-Achse im negativen $y$-Bereich. Diese hat allgemein die Gleichung:

$y = c,$

Die Darstellung im Koordinatensystem könnte etwa so aussehen:




Die Grundfläche ergibt sich jetzt durch die Differenz der Integrale der Parallelen und $f$. Das Intervall, über das integriert werden muss, ist durch die Schnittstellen der beiden Schaubilder gegeben. Diese beiden Schnittstellen $x_{s1}$ und $x_{s2}$ lassen sich in Abhängigkeit von $c$ durch Gleichsetzen der Funktionsterme bestimmen.

Für die neue Grundfläche $G_n$ ergibt sich daraus:

$$G_n = \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} (c - f(x))\,\mathrm{d}x$$

Hier kann der Betrag vernachlässigt werden, da sowohl das Integral von $c$ als auch von $f(x)$ negativ ist und das Integral von $f(x)$ den größeren Betrag besitzen muss (sonst ist der Kanal ausgetrocknet, was laut Aufgabenstellung nicht passieren kann).

Der Lösungsterm enthält drei Unbekannte - die Schnittstellen und $c$. $x_{s1}$ und $x_{s2}$ lassen sich aber in Abhängigkeit von $c$ bestimmen, sodass nur noch eine Unbekannte bleibt.

Für die Schnittstellen gilt, dass die Funktionswerte von Kurve und Gerade gleich sein müssen:

$$f(x) = c$$

Setzte den Funktionsterm ein und löse nach $x_{s1}$ und $x_{s2}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= c \\
0,0125x^4 - 3,2 &= c && \mid +3,2 \\
0,0125x^4 &= c + 3,2 && \mid :0,0125 \\
x^4 &= 80c + 256 && \mid \sqrt[4]{\phantom{x}} \\
\boldsymbol{x_{s1}} &= \boldsymbol{+\sqrt[4]{80c+256}} \\
\boldsymbol{x_{s2}} &= \boldsymbol{-\sqrt[4]{80c+256}}
\end{aligned}$$

Setze die Werte für $x_{s1}$ und $x_{s2}$ nun in die Formel für die Grundfläche ein und vereinfache:

$$
\begin{aligned}
G_n &= \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} (c - f(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\sqrt[4]{80c+256}}^{\sqrt[4]{80c+256}} (c - f(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\sqrt[4]{80c+256}}^{\sqrt[4]{80c+256}} \left(c - (0,0125x^4 - 3,2)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\sqrt[4]{80c+256}}^{\sqrt[4]{80c+256}} \left(c - 0,0125x^4 + 3,2\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[cx - \tfrac{1}{5}\cdot 0,0125x^5 + 3,2x\right]_{-\sqrt[4]{80c+256}}^{\sqrt[4]{80c+256}} \\
&= \left[(c+3,2)x - 0,0025x^5\right]_{-\sqrt[4]{80c+256}}^{\sqrt[4]{80c+256}} \\
&= (c+3,2)\cdot\sqrt[4]{80c+256} - 0,0025\cdot\left(\sqrt[4]{80c+256}\right)^5 - \\
&\quad \left((c+3,2)\cdot\left(-\sqrt[4]{80c+256}\right) - 0,0025\cdot\left(-\sqrt[4]{80c+256}\right)^5\right) \qquad \text{Klammern auflösen:} \\
&= (c+3,2)\cdot\sqrt[4]{80c+256} - 0,0025\cdot\left(\sqrt[4]{80c+256}\right)^5 + \\
&\quad (c+3,2)\cdot\sqrt[4]{80c+256} - 0,0025\cdot\left(\sqrt[4]{80c+256}\right)^5 \\
&= 2\cdot(c+3,2)\cdot\sqrt[4]{80c+256} - 2\cdot 0,0025\cdot\left(\sqrt[4]{80c+256}\right)^5
\end{aligned}
$$

Nun gilt, wie zuvor bestimmt, für das neue Volumen $V_n$ die Gleichung:

$V_n = G_n \cdot h$

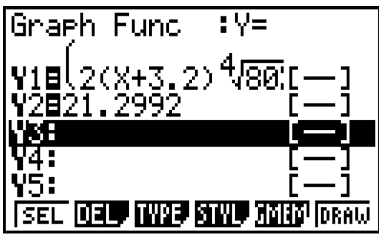
Da $V_n$ 80 % von $V_{GES}$ beträgt, ist $V_n$ ebenso:

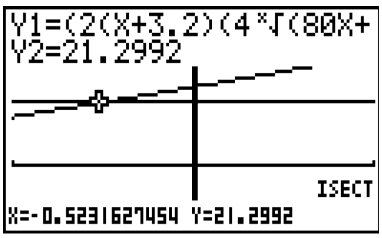
$V_n = 0,8 \cdot 26,624 = 21,2992$

Setze das Ergebnis, den Wert für $h$ und die Formel von $G_n$ in Abhängigkeit von $c$ in die Volumengleichung ein:

$$21,2992 = \left(2\cdot(c+3,2)\cdot\sqrt[4]{80c+256} - 2\cdot 0,0025\cdot\left(\sqrt[4]{80c+256}\right)^5\right)\cdot 1,3$$

Diese Gleichung lässt sich mithilfe des GTR lösen. Gib dazu die linke und die rechte Seite der Gleichung jeweils als Funktionsvorschrift in den `Y=`-Editor deines GTR ein. Bestimme dann über die Befehlsfolge `SHIFT → F5 → F5` den Schnittpunkt. In diesem Punkt gilt die Gleichheit der beiden Seiten der Gleichung. Die Schnittstelle liegt dann an der Stelle $c$.




Die Schnittstelle befindet sich bei $c \approx -0,5232$. Der neue Wasserpegel liegt nun bei

$y \approx -0,5232$

Da der Wasserstand vorher auf Höhe der $x$-Achse, also bei $y = 0$ lag, ist er nun um etwa $0,5232\,\text{m}$ gesunken.

Wenn bei derselben Strömungsgeschwindigkeit also nur noch 80 % der Wassermenge pro Sekunde durch den Kanalquerschnitt fließen, ist der Wasserpegel um etwa $52,32\,\text{cm}$ gesunken.