2.1.1 ► **Prüfung, ob f monoton steigend ist** (5P)

Eine Funktion f ist monoton steigend, wenn ihre Steigung immer größer oder gleich Null ist. In der Abbildung ist das Schaubild der Ableitung von f abgebildet. Die Ableitung definiert die Steigung in einem Punkt der Kurve. An der Ausdehnung des Schaubildes entlang der y-Achse kann man also erkennen, ob die Steigung immer größer oder gleich Null ist.

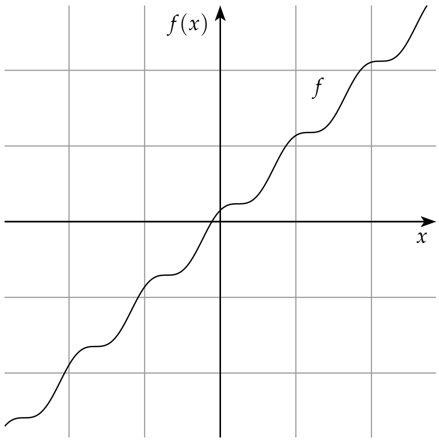
Tatsächlich bewegt sich die Steigung zwischen Null und 2, sie wird also nie negativ. Daher ist f monoton steigend. Die Aussage stimmt.

► **Prüfung, ob das Schaubild von f symmetrisch zur y-Achse ist**

Das Schaubild einer Funktion ist dann symmetrisch zur y-Achse, wenn ein Punkt rechts davon auf der Kurve in einem bestimmten Abstand die gleiche y-Koordinate hat, wie ein Punkt im gleichen Abstand links von der Kurve. Es muss also gelten:

$$f(x) = f(-x)$$

Nun ist aber bekannt, dass die Funktion monoton wächst. Die Skizze rechts zeigt einen ungefähren Verlauf des Schaubildes von f. Die y-Koordinaten der Punkte auf der Kurve werden also ständig größer. Die Bedingung für y-Achsensymmetrie verlangt aber, dass immer jeweils zwei Punkte die gleiche y-Koordinate besitzen. Sie kann also nicht erfüllt werden.
Das Schaubild von f ist daher nicht symmetrisch zur y-Achse.



► **Prüfung, ob der Graph von f in P dieselbe Steigung hat wie die erste Winkelhalbierende**

Die erste Winkelhalbierende ist die Gerade durch den Ursprung, die den Winkel, den die Koordinatenachsen im ersten Quadranten einschließen, halbiert. Ihre Gleichung lautet:

$$y = x$$

Die Steigung dieser Geraden ist genau 1.
Am Schaubild von f' kann man nun die tatsächliche Steigung im Punkt $P\left(\frac{\pi}{2} \mid f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ablesen. Dort ist sie ebenso gleich 1.
Das Schaubild von f hat in P daher dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende.

2.1.2 ► **Funktionsterm von f'** (5P)

Das Schaubild von f' ist das einer trigonometrischen Funktion. Da das Schaubild auf der y-Achse ein Maximum aufweist, ist es sinnvoll f' als eine Cosinus-Funktion zu definieren. Allgemein lautet die Gleichung von f' dann:

$$f'(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d,$$

a entspricht der Amplitude des Schaubildes. b definiert die Periode p der Funktion über die Formel

$$p = \frac{2\pi}{b}.$$

c definiert die Verschiebung des Schaubildes entlang der x-Achse und d die Verschiebung entlang der y-Achse.

Die Amplitude des Schaubildes ist die maximale Auslenkung der Kurve und beträgt $a = 1$.

Die Periode ist der Teil des Schaubildes, der sich immer wieder wiederholt. In unserem Fall ist er $p = 2\pi$ lang. Für b ergibt sich dadurch:

$$p = \frac{2\pi}{b} \implies b = \frac{2\pi}{p} \implies b = \frac{2\pi}{2\pi} \implies b = 1$$

Der Cosinus von Null ist 1. Da die Werte im Cosinus nur zwischen 1 und -1 schwanken können, muss an der Stelle $x = 0$ ein Maximum liegen. Da dies der Fall ist, beträgt die Verschiebung c entlang der x-Achse Null.

Die Wendepunkte einer trigonometrischen Funktion ohne y-Achsenverschiebung liegen alle auf der x-Achse. Die Wendepunkte im Schaubild von f' liegen allerdings auf einer Parallelen zur x-Achse, mit $y = 1$. Die y-Achsenverschiebung muss daher $d = 1$ betragen.

Die Funktionsgleichung von f' lautet somit:

$$f'(x) = 1 \cdot \cos(1 \cdot (x - 0)) + 1 = \cos(x) + 1$$

▶ **Funktionssterm von f**

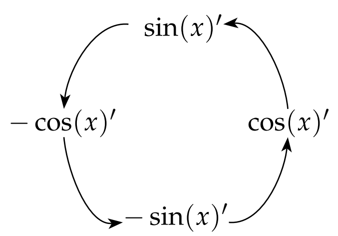
Gesucht ist die Funktionsgleichung $f(x)$. Die Funktion f ist eine Stammfunktion von f'. Zudem schneiden sich die Schaubilder von f und f' auf der y-Achse.

Eine Stammfunktion lässt sich über das Integral nach x bestimmen. Diese hat dann einen Parameter C, der der y-Achsenverschiebung der Funktion entspricht, die beim Ableiten eliminiert wird. Diesen Parameter kann man anschließend durch Einsetzen der Koordinaten des gemeinsamen Punktes von f und f' in die Gleichung der Stammfunktion ermitteln.

Bestimme zunächst eine Stammfunktion von f' durch Integration nach x:

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = \int (\cos(x) + 1)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + x$$

Die Stammfunktion von Sinus- und Cosinusfunktionen wird nach folgender Regel bestimmt:



Merkhilfe Trig-Kreis

Zusammen mit dem Parameter C hat f also die Funktionsgleichung

$$f(x) = \sin(x) + x + C$$

Das Schaubild von f schneidet f' auf der y-Achse, das heißt in einem Punkt mit den Koordinaten $P(0 \mid f'(0))$. Berechne $f'(0)$:

$$f'(0) = \cos(0) + 1 = 1 + 1 = 2$$

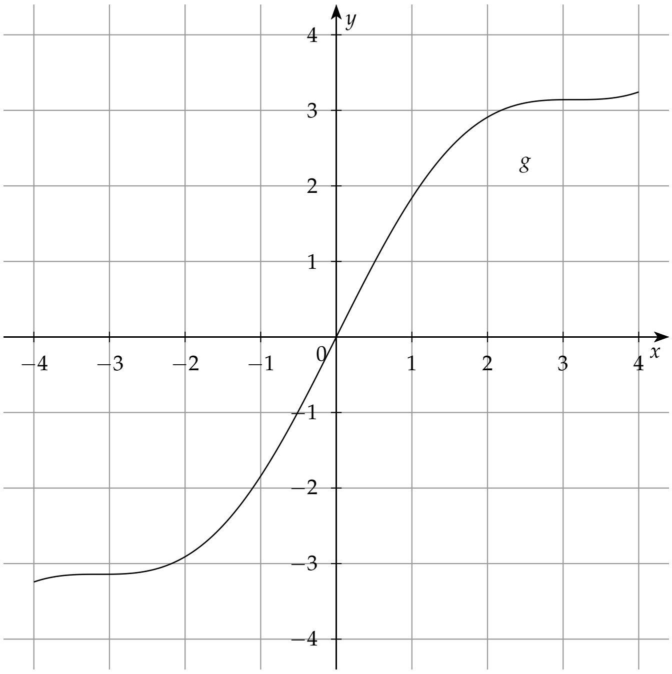
Du kannst jetzt durch Einsetzen der Koordinaten von P in $f(x)$ den Parameter C ermitteln:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) + x + C \\ 2 &= \sin(0) + 0 + C \\ C &= 2 \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung von f lautet damit

$$f(x) = \sin(x) + x + 2.$$

2.2.1 ▶ **Schaubild K von g** (3P)



2.2.2 ▶ **Nachweis, dass die Wendepunkte von K auf der ersten Winkelhalbierenden liegen** (9P)

Gesucht sind die Wendepunkte von K, denen die Lage auf der ersten Winkelhalbierenden nachgewiesen werden muss. Wendepunkte sind Punkte, in denen die Steigung ein Extremum erreicht. Es sind also Hoch- oder Tiefpunkte der Steigung. Die Änderungsrate der Steigung wird in einem Hoch- oder Tiefpunkt der Steigung Null. Da die Steigung einer Funktion durch ihre erste Ableitung definiert ist, ist die Änderungsrate der Steigung durch die zweite Ableitung bestimmt. Diese wird in einem Wendepunkt Null.

Die notwendige Bedingung für Wendepunkte lautet daher

$$f''(x) = 0$$

Damit es sich bei den Lösungen aber tatsächlich um Wendepunkte handelt, muss die hinreichende Bedingung für Wendepunkte -

$$f'''(x) \neq 0$$

ebenfalls erfüllt sein, da sonst kein Extremum der Steigung vorliegt.

Sind die Wendepunkte gefunden, muss gezeigt werden, da sie alle auf der ersten Winkelhalbierenden liegen.

Die erste Winkelhalbierende ist die Gerade durch den Ursprung, die den Winkel, den die Koordinatenachsen im ersten Quadranten einschließen, halbiert. Ihre Gleichung lautet:

$$y = x$$

Die Funktionsgleichung sagt aus, dass die x-Koordinaten aller Punkte auf der ersten Winkelhalbierenden gleich deren y-Koordinaten sind. Ein Punkt der ersten Winkelhalbierenden lautet daher beispielsweise $S(6\,|\,6)$. Wenn die berechneten Wendepunkte diese Bedingung erfüllen, liegen sie auf der ersten Winkelhalbierenden.

Bestimmen wir zunächst die Wendepunkte von g. Bilde dazu die zweite und dritte Ableitung von g:

$$\begin{aligned} g(x) &= x + \sin(x) \\ g'(x) &= 1 + \cos(x) \\ \boldsymbol{g''(x)} &= \boldsymbol{-\sin(x)} \\ \boldsymbol{g'''(x)} &= \boldsymbol{-\cos(x)} \end{aligned}$$

Setze nun den Funktionsterm der zweiten Ableitung in die notwendige Bedingung für Wendepunkte ein und bestimme die Wendestellen:

$$\begin{aligned} g''(x) &= 0 \\ -\sin(x) &= 0 \end{aligned}$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist das negative Vorzeichen zu vernachlässigen, da $\sin(x)$ Null werden muss, damit das Produkt Null wird. $\sin(x)$ wird Null für:

$x = 0 + n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Im Definitionsintervall $[-4; 4]$ kann n die Werte der Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-1, 0, 1\}$ annehmen. Die drei möglichen Wendepunkte haben damit die x-Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + (-1) \cdot \pi = -\pi \\ x_2 &= 0 + (0) \cdot \pi = 0 \\ x_3 &= 0 + 1 \cdot \pi = \pi \end{aligned}$$

Prüfe diese nun auf die hinreichende Bedingung für Wendepunkte, indem du die x-Koordinaten in $g'''(x)$ einsetzt:

$$\begin{aligned} g'''(x_1) &= -\cos(-\pi) = 1 \neq 0 \\ g'''(x_2) &= -\cos(-0) = -1 \neq 0 \\ g'''(x_3) &= -\cos(\pi) = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung ist für alle Lösungen erfüllt.

Schließlich muss geprüft werden, ob diese Punkte auf der ersten Winkelhalbierenden liegen. Dazu müssen zunächst die y-Koordinaten der Wendepunkte bestimmt werden.

Setze dafür die x-Koordinaten in $g(x)$ ein und vereinfache:

$$\begin{aligned} g(x_1) &= -\pi + \sin(-\pi) && \sin(\pm\pi) = 0 \\ &= -\pi \\ g(x_2) &= 0 + \sin(0) && \sin(0) = 0 \\ &= 0 \\ g(x_3) &= \pi + \sin(\pi) && \sin(\pm\pi) = 0 \\ &= \pi \end{aligned}$$

Die Wendepunkte haben die Koordinaten $W_1(-\pi\,|\,-\pi)$, $W_2(0\,|\,0)$ und $W_3(\pi\,|\,\pi)$. Für sie gilt die Bedingung für die Lage auf der ersten Winkelhalbierenden

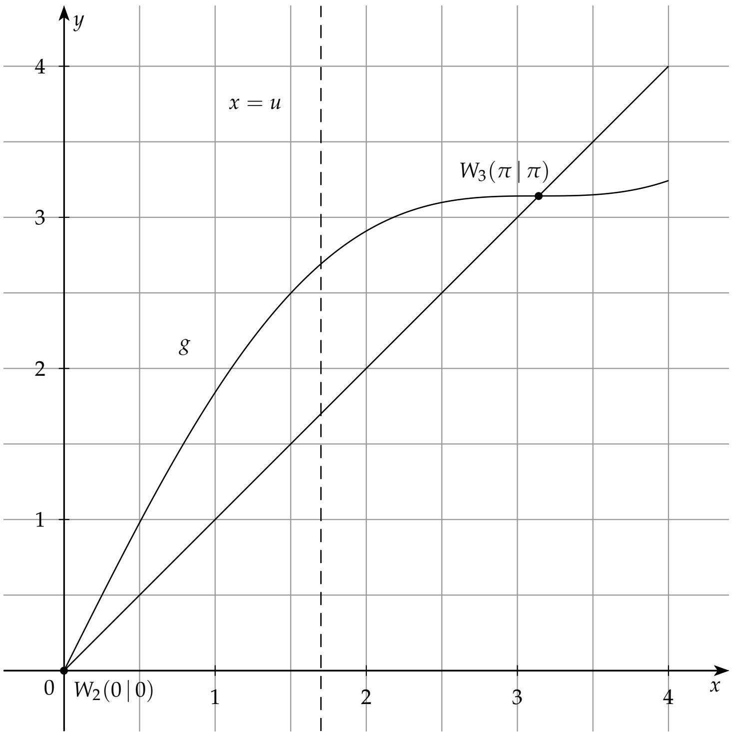
$y = x$,

da die x-Koordinaten gleich den y-Koordinaten sind.

Die drei Wendepunkte von K liegen somit auf der ersten Winkelhalbierenden.

▶ Parallele zur y-Achse, die die Fläche im Verhältnis 1 : 2 teilt

Es ist eine Parallele zur x-Achse gesucht, die die von K und erster Winkelhalbierender im 1. Quadranten eingeschlossene Fläche im Verhältnis 1 : 2 teilt. Zur besseren Vorstellung ist bei dieser Aufgabenstellung eine Skizze des ersten Quadranten sinnvoll. Da die Wendepunkte von K - wie zuvor gezeigt - auf der Winkelhalbierenden liegen, können diese ebenfalls in die Skizze eingetragen werden.



Man erkennt, dass sich die eingeschlossene Fläche in Intervall $[0; \pi]$ befindet.

Flächen unter Kurven werden allgemein über den Betrag des Integrals über das Intervall berechnet, innerhalb dessen sie sich befinden. In unserem Fall kann der Betrag vernachlässigt werden, da sich die Flächen im positiven y-Bereich befinden. Die eingeschlossene Fläche ist hierbei die Differenz zwischen der Fläche unter g und der Dreiecksfläche unter der ersten Winkelhalbierenden mit $y = x$.

Die Gesamtfläche kann daher als Integral der Differenz von g und $y = x$ über das Intervall $[0; \pi]$ dargestellt werden:

$$A_{GES} = \int_0^{\pi} (g(x) - x)\,\mathrm{d}x$$

Die Parallele zur y-Achse mit der Gleichung $x = u$ teilt diese Fläche in zwei Stücke. Ein Teilstück befindet sich dann im Intervall $[0; u]$, das andere im Intervall $[u; \pi]$. Diese beiden Teilstücke sollen nun im Verhältnis 1 : 2 zueinander stehen. Es gilt also entweder

$$\frac{A_1}{A_2} = 2 \text{ oder}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2}.$$

Die einzelnen Flächen können wie die Gesamtfläche auch als Integrale der Differenz zwischen g und $y = x$ dargestellt werden. Es ändern sich nur jeweils die Intervalle über die integriert wird.

Daraus ergibt sich für A_1 und A_2:

$$A_1 = \int_0^u (g(x) - x)\,\mathrm{d}x$$

$$A_2 = \int_u^\pi (g(x) - x)\,\mathrm{d}x$$

Über die Gesamtfläche kann ermittelt werden, wie groß A_1 und A_2 sein müssen, um dem Verhältnis zu entsprechen. Durch Gleichsetzen mit diesen Werten kann dann die unbekannte Intervallgrenze u ermittelt werden. Diese ist gleich der gesuchten Parallelen zur y-Achse.

Bestimme zunächst die Gesamtfläche durch das Integral der Differenz von g und $y = x$:

$$\begin{aligned} A_{GES} &= \int_0^\pi (g(x) - x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi (x + \sin(x) - x)\,\mathrm{d}x \\ &= [-\cos(x)]_0^\pi \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\ &= -(-1) - (-1) = 2 \end{aligned}$$

Der Inhalt der gesamten eingeschlossenen Fläche beträgt 2 FE.

Die gesuchten Teilflächen teilen die Gesamtfläche im Verhältnis 2 : 1. Die bedeutet, dass eine der Flächen $\frac{2}{3}$ der Gesamtfläche einnimmt, während die andere dann nur $\frac{1}{3}$ der gesamten Fläche beansprucht. Die größere Fläche muss also den Inhalt

$$\frac{2}{3} \cdot A_{GES} = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

besitzen.

Es gilt also entweder

$A_1 = \frac{4}{3}$ (**Lösungsweg A**) oder

$A_2 = \frac{4}{3}$ (**Lösungsweg B**).

Bestimme nun die Variable u durch Gleichsetzen der Flächeninhaltes mit dem zugehörigen Integral:

▶▶ Lösungsweg A: $A_1 = \frac{4}{3}$

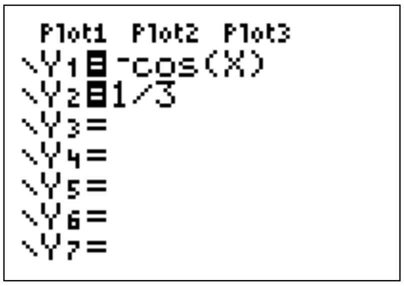
Die Teilfläche A_1 soll $\frac{4}{3}$ FE umfassen. A_1 wird durch das Integral der Differenz zwischen g und $y = x$ über das Intervall $[0; u]$ dargestellt. Du kannst also gleichsetzen und erhältst:

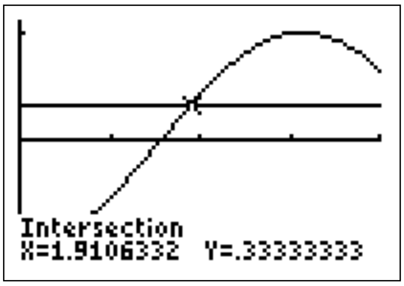
$$\frac{4}{3} = \int_0^u (g(x) - x)\,\mathrm{d}x$$

Löse das Integral in Abhängigkeit von u und löse nach der Variablen auf:

$$\frac{4}{3} = \int_0^u (x + \sin(x) - x)\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{4}{3} = [-\cos(x)]_0^u$$
$$\frac{4}{3} = -\cos(u) - (-\cos(0))$$
$$\frac{4}{3} = -\cos(u) + 1 \qquad \mid -1$$
$$\frac{1}{3} = -\cos(u)$$

Die sich ergebende Gleichung lässt sich mithilfe des GTR lösen. Gib dazu beide Seiten der Gleichung jeweils als Funktion in den `Y=`-Editor ein und zeichne die Schaubilder. Bestimme dann über die Befehlsfolge `2ND → CALC → 5` den Schnittpunkt im Intervall $[0;\pi]$.





Der Schnittpunkt befindet sich bei $u \approx 1{,}9106$.

Die Gerade, die die eingeschlossene Fläche im Verhältnis 2 : 1 teilt, hat somit die Gleichung $u = x = 1{,}9106$.

►► Lösungsweg B: $A_2 = \frac{4}{3}$

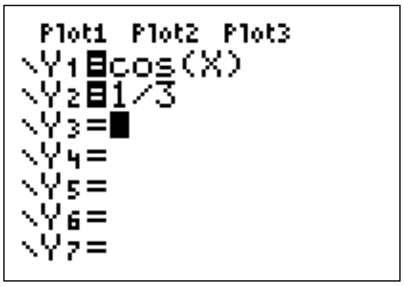
Die Teilfläche A_2 soll $\frac{4}{3}$ FE umfassen. A_2 kann durch das Integral der Differenz zwischen g und $y = x$ über das Intervall $[u;\pi]$ dargestell twerden. Du kannst also gleichsetzen und erhältst:

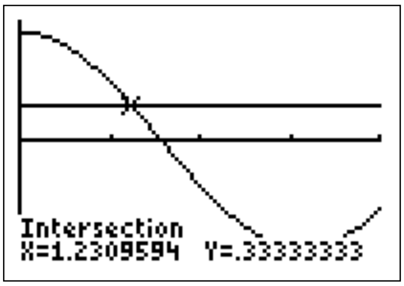
$$\frac{4}{3} = \int_u^\pi (g(x) - x)\,\mathrm{d}x$$

Löse das Integral in Abhängigkeit von u und löse nach der Variablen auf:

$$\frac{4}{3} = \int_u^\pi (x + \sin(x) - x)\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{4}{3} = [-\cos(x)]_u^\pi$$
$$\frac{4}{3} = -\cos(\pi) - (-\cos(u))$$
$$\frac{4}{3} = -(-1) + \cos(u) \qquad \mid -1$$
$$\frac{1}{3} = \cos(u)$$

Das Ergebnis lässt sich mithilfe des GTR lösen. Gib dazu beide Seiten der Gleichung jeweils als Funktion in den `Y=`-Editor ein und zeichne die Schaubilder. Bestimme dann über die Befehlsfolge `2ND → CALC → 5` den Schnittpunkt im Intervall $[0;\pi]$.



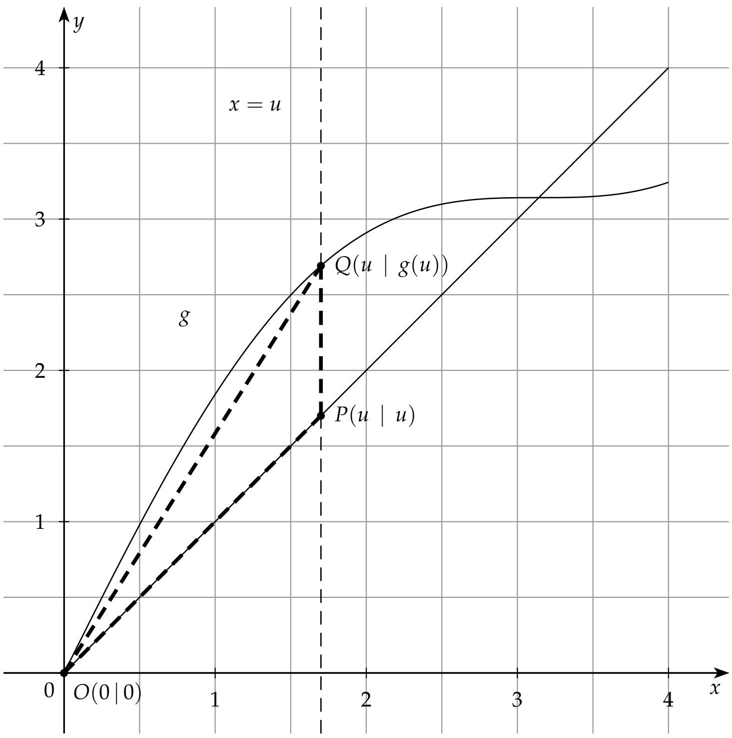


Der Schnittpunkt befindet sich bei $u \approx 1{,}2310$.

Die Parallele zur y-Achse, die die eingeschlossene Fläche im Verhältnis $2:1$ teilt, hat somit die Gleichung $u = x = 1{,}2310$.

2.2.3 ▶ **Wert von u, für den die Fläche des Dreiecks maximal wird** (5P)

Es ist wieder eine zur y-Achse parallele Gerade mit der Gleichung $x = u$ gesucht. Diese Gerade schneidet K im Punkt $Q(u \mid g(u)$ und die erste Winkelhalbierende mit der Gleichung $y = x$ folglich im Punkt $P(u \mid u)$. Zusammen mit dem Ursprung $O(0 \mid 0)$ bilden die drei Punkte das Dreieck $\triangle OPQ$. Zur besseren Vorstellung ist hier eine Skizze sinnvoll:



Wir können die Fläche des Dreiecks in Abhängigkeit von u darstellen.

Dazu nehmen wir die Seite PQ als Grundseite. Da die Punkte die gleichen x-Koordianten besitzen, ist die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ gleich der Differenz ihrer y-Koordinaten.

$$\overline{PQ} = g(u) - u$$

Die Höhe des Dreiecks ist der Abstand der Geraden durch die Grundseite zur Spitze O des Dreiecks. Dieser ist gerade gleich den x-Koordinaten von P und Q:

$$x = u.$$

Die Flächeninhaltsformel für Dreiecke lautet allgemein:

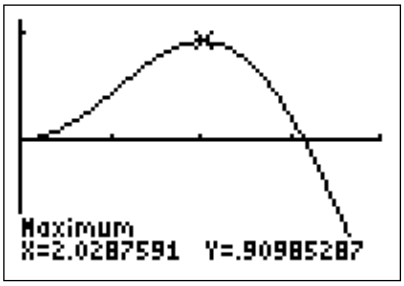
$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$

Durch Einsetzen der Definitionen für die Grundseite und die Höhe ergibt sich eine Flächenfunktion $A_{\triangle}$ in Abhängigkeit von u mit der Gleichung

$A_{\triangle}(u) = \frac{1}{2} \cdot (g(u) - u) \cdot u.$

Diese Fläche soll nun maximal werden, für ein u, das Werte zwischen 0 und π annehmen kann.

Dies kannst mit dem GTR erledigen, indem du die Funktion in den `Y=`-Editor eingibst und das Schaubild im Intervall $[0, \pi]$ zeichnest. Man erkennt, dass das relative Maximum in diesem Abschnitt auch das absolute darstellt. Du kannst nun über die Befehlsfolge `2ND → CALC → 4` das Maximum des Schaubildes bestimmen. Es befindet sich an der gesuchten Stelle u.



Das Maximum befindet sich bei $u \approx 2,0288$. Die Fläche des Dreiecks $\triangle OPQ$ wird also für den Wert $u = 2,0288$ maximal.

2.2.4 ▶ **Bestimmung des Funktionsterms** (7P)

Gesucht ist der Funktionsterm eine Polynomfunktion 4. Grades. Allgemein lautet die Gleichung einer solchen Funktion:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Die Funktionsgleichung besitzt die fünf Parameter a, b, c, d und e. Es müssen daher fünf Bedingungen gegeben sein, damit allen diesen Parametern ein Wert zugewiesen werden kann. Diese kannst du der Aufgabenstellung entnehmen:

1. Das Schaubild der Funktion schneidet die x-Achse in $A(-1\,|\,0)$.
2. Das Schaubild der Funktion verläuft durch $B\left(2\,|\,\frac{9}{5}\right)$.
3. Das Schaubild hat im Ursprung einen Wendepunkt.
4. Das Schaubild verläuft durch den Ursprung $O(0\,|\,0)$.
5. Das Schaubild schneidet K im Ursprung senkrecht.

Aus diesen fünf Bedingungen lassen sich fünf Gleichungen mit den gesuchten Parametern aufstellen und lösen.

Stelle zunächst die fünf Gleichungen auf.

Die **erste Bedingung** sagt aus, dass an der Stelle $x = -1$ eine Nullstelle vorliegt. Für die erste Gleichung gilt also:

$$f(-1) = 0$$
$$a \cdot (-1)^4 + b \cdot (-1)^3 + c \cdot (-1)^2 + d \cdot (-1) + e = 0$$
$$\textbf{(I)} \qquad \boldsymbol{a - b + c - d + e = 0}$$

Die **zweite Bedingung** ist der ersten Bedingung ähnlich. Allerdings liegt keine Nullstelle vor. Es gilt:

$$f(2) = \frac{9}{5}$$
$$a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2 + e = \frac{9}{5}$$
$$\textbf{(II)} \qquad \mathbf{16a + 8b + 4c + 2d + e = \frac{9}{5}}$$

Die **dritte Bedingung** sagt aus, dass an der Stelle $x = 0$ ein Wendepunkt vorliegt. Wendepunkte sind Extrema der Steigung. Die Steigung wird durch die erste Ableitung definiert. In einem Extrempunkt der Steigung wird die Änderungsrate der Steigung - also die zweite Ableitung - Null. Es gilt hier also:

$f''(0) = 0$

Um die dritte Gleichung zu formulieren, bilden wir die zweite Ableitung von f:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

Setze die **dritte Bedingung** in $f''(x)$ ein und vereinfache die dritte Gleichung:

$$f''(0) = 0$$
$$12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c = 0$$
$$2c = 0$$
$$\textbf{(III)} \qquad \mathbf{c = 0}$$

Die **vierte Bedingung** ist analog zur ersten. Es gilt:

$f(0) = 0$

Setze die Bedingung in $f(x)$ ein und vereinfache die vierte Gleichung:

$$f(0) = 0$$
$$a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0$$
$$\textbf{(IV)} \qquad \mathbf{e = 0}$$

Die **fünfte und letzte Bedingung** sagt etwas über die Steigung von f im Ursprung aus. Das Schaubild soll in diesem Punkt senkrecht auf das Schaubild K von g stehen. Für die Steigungen m_1 und m_2 von zwei senkrecht aufeinander stehenden Geraden gilt, dass die Steigung der einen Geraden sich negativ reziprok zur Steigung der anderen Geraden verhält. Es gilt:

$m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

Dabei ist m_2 die gesuchte Steigung von f im Ursprung und m_1 die Steigung von g.
Wir können die Formel also anpassen:

$f'(0) = -\dfrac{1}{g'(0)}$

Die Steigung einer Funktion wird durch ihre erste Ableitung definiert. Wie zuvor berechnet, lautet die Funktionsgleichung von f':

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Die erste Ableitung g' von g lautet

$$g(x) = x + \sin(x)$$
$$g'(x) = 1 + \cos(x)$$

Setze nun in die zuvor aufgestellte Formel ein und bestimme daraus die fünfte Gleichung:

$$\begin{aligned}
f'(0) &= -\frac{1}{g'(0))} \\
4a\cdot 0^3 + 3b\cdot^2 + 2c\cdot 0 + d &= -\frac{1}{1+\cos(0)} \\
d &= -\frac{1}{1+1} \\
\textbf{(V)} \qquad \boldsymbol{d} &= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}
\end{aligned}$$

Wir erhalten insgesamt fünf Gleichungen mit fünf Variablen:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{(I)} & a & -b & +c & -d & +e & = 0 \\
\text{(II)} & 16a & +8b & +4c & +2d & +e & = \frac{9}{5} \\
\text{(III)} & & & c & & & = 0 \\
\text{(IV)} & & & & & e & = 0 \\
\text{(V)} & & & & d & & = -\frac{1}{2}
\end{array}$$

Setze (III), (IV) und (V) in (I) und (II) ein und vereinfache:

$$\begin{array}{llllll}
\text{(Ia)} & a & -b & +0 & +\frac{1}{2} & +0 = 0 \\
\text{(Ia)} & a & -b & & +\frac{1}{2} & = 0 \\
\text{(IIa)} & 16a & +8b & +4\cdot 0 & +2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & +0 = \frac{9}{5} \\
\text{(IIa)} & 16a & +8b & & -1 & = \frac{9}{5}
\end{array}$$

Die Variablen c, d und e sind bekannt. Übrig bleiben zwei Gleichungen mit den Variablen a und b. Löse dieses LGS mit einem geeigneten Verfahren:

$$\begin{array}{lrl}
\text{(Ia)} & a - b + \frac{1}{2} = 0 & \text{Löse nach } a \text{ auf:} \\
\text{(Ia)} & a = b - \frac{1}{2} & \text{Setze in (IIa) ein:} \\
\text{(IIb)} & 16\cdot(b - \frac{1}{2}) + 8b - 1 = \frac{9}{5} & \\
\text{(IIb)} & 16b - 8 + 8b - 1 = \frac{9}{5} & \\
\text{(IIb)} & 24b - 9 = \frac{9}{5} & \mid\ +9 \\
\text{(IIb)} & 24b = \frac{9}{5} + 9 & \\
\text{(IIb)} & 24b = \frac{9}{5} + \frac{45}{5} & \\
\text{(IIb)} & 24b = \frac{54}{5} & \mid\ \cdot\frac{1}{24}
\end{array}$$

(IIb) $b = \frac{54}{5} \cdot \frac{1}{24}$

(IIb) $\boldsymbol{b = \frac{9}{20}}$ Setze in (Ia) ein:

(Ib) $a = \frac{9}{20} - \frac{1}{2}$

(Ib) $\boldsymbol{a = -\frac{1}{20}}$

Die Funktionsgleichung der gesuchten Funktion f lautet somit:

$$f(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{9}{20}x^3 - \frac{1}{2}x$$

2.3.1 ▶ **Bereiche, in denen h_1 monoton wachsend und ihr Schaubild rechtsgekrümmt ist** (5P)

Gegeben ist die Funktion h_1 durch

$h_1(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{9}{20}x^3 - \frac{1}{2}x$ für $x \in \mathbb{R}$.

Eine Funktion steigt monoton, wenn ihre Steigung durchgehend größer oder gleich Null ist. Die Steigung einer Funktion ist durch ihre Ableitung definiert. Es gilt also einmal:

$$\boldsymbol{h_1'(x) \geq 0}$$

Rechtsgekrümmt ist ein Schaubild einer Funktion dann, wenn seine Steigung sinkt, also dann, wenn die Änderungsrate der Steigung negativ ist. Die Änderungsrate der Steigung wird durch die zweite Ableitung definiert. Es muss also ebenso gelten:

$$\boldsymbol{h_1''(x) < 0}$$

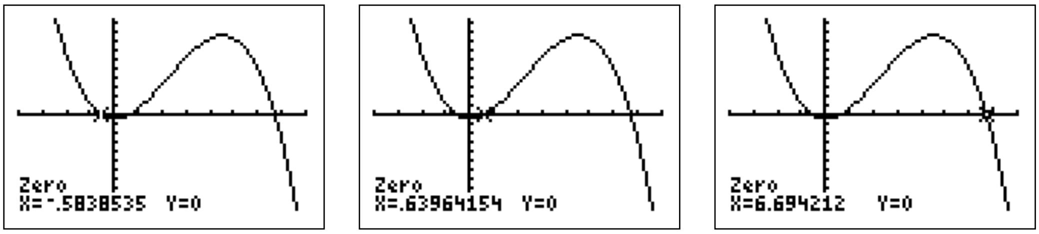
Nur dort, wo beide Bedingungen erfüllt sind, ist das Schaubild von h_1 monoton wachsend und rechtsgekrümmt.

Wo dies gilt, erkennt man besten, indem man die beiden Schaubilder von h_1' und h_1'' im GTR darstellt. Bilde dazu die erste und zweite Ableitung von h_1:

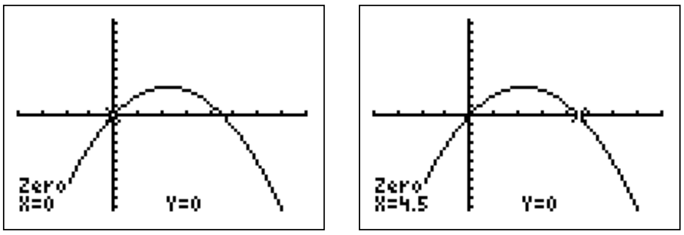
$$h_1(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{9}{20}x^3 - \frac{1}{2}x$$
$$h_1'(x) = -\frac{4}{20}x^3 + \frac{27}{20}x^2 - \frac{1}{2}$$
$$\boldsymbol{h_1'(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{27}{20}x^2 - \frac{1}{2}}$$
$$h_1''(x) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{54}{20}x$$
$$\boldsymbol{h_1''(x) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{27}{10}x}$$

Füge die beiden Funktionsterme in den `Y=`-Editor ein und erstelle über `GRAPH` die Schaubilder.

Unten ist das Schaubild von h_1' zu sehen. Über die Befehlsfolge `2ND → CALC → 2` findest du die Nullstellen heraus. Diese liegen bei $x_1 \approx -0{,}5839$, $x_2 \approx 0{,}6396$ und $x_3 \approx 6{,}6942$. Für $x \leq x_1$ und $x_2 \leq x \leq x_3$ ist h_1' größer oder gleich Null. Die Funktion ist dort monoton steigend.



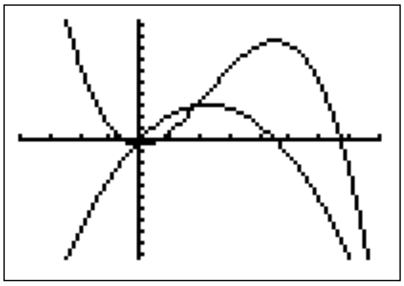
Unten ist das Schaubild von h_1'' zu sehen. Über die Befehlsfolge $\boxed{\texttt{2ND} \rightarrow \texttt{CALC} \rightarrow 2}$ findest du auch hier die Nullstellen heraus. Diese liegen bei $x_4 = 0$ und $x_5 = 4,5$. Für $x < x_4$ und $x > x_5$ ist h_1'' kleiner Null. In diesen Bereichen ist das Schaubild von h_1 rechtsgekrümmt.



Fügt man beide Schaubilder zusammen, so ergeben sich zwei Bereiche, innerhalb derer h_1' größer oder gleich Null ist *und* h_1'' kleiner Null ist, nämlich für

$x < x_1$ und

$x_5 < x < x_3$.



Für $x < -0,5839$ und $4,5 < x < 6,6942$ ist h_1 monoton wachsend und das zugehörige Schaubild rechtsgekrümmt.

2.3.2 ► **Nachweis eines Wendepunkts mit waagerechter Tangente** (6P)

Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente wird auch Sattelpunkt genannt. In einem Sattelpunkt

1. ist die Steigung gleich Null, der Punkt hat also eine waagerechte Tangente,

2. die Steigung erreicht ein Extremum, da es sich um einen Wendepunkt handelt.

Die Steigung ist durch die erste Ableitung von h_t gegeben. Die erste Bedingung lautet damit:

(I) $\boldsymbol{h_t'(x) = 0}$

Dort, wo die Steigung ein Extremum erreicht, ist die Änderungsrate der Steigung gleich Null. Die Änderungsrate ist durch die zweite Ableitung definiert. Es gilt also weiterhin:

(II) $\boldsymbol{h_t''(x) = 0}$

Da es sich um ein Extremum der Steigung handelt, muss die hinreichende Bedingung für Extrempunkte erfüllt sein. An einem Extremum der Steigung wechselt die Änderungsrate der Steigung von negativ nach positiv oder von positiv nach negativ. Dessen Ableitung - also die dritte Ableitung von h_t muss in diesem Punkt daher positiv oder negativ - aber nicht Null sein. Es gilt also zuletzt noch:

(III) $\boldsymbol{h_t'''(x) \neq 0}$

Es gibt also drei Bedingungen, die erfüllt werden müssen.

Um diese zu prüfen, bilde zunächst die erste, zweite und dritte Ableitung von h_t:

$$\begin{aligned}
h_t(x) &= -\frac{1}{20}tx^4 + \frac{9}{20}tx^3 - \frac{1}{2}x \\
\boldsymbol{h_t'(x)} &= \boldsymbol{-\frac{1}{5}tx^3 + \frac{27}{20}tx^2 - \frac{1}{2}} \\
\boldsymbol{h_t''(x)} &= \boldsymbol{-\frac{3}{5}tx^2 + \frac{27}{10}tx} \\
\boldsymbol{h_t'''(x)} &= \boldsymbol{-\frac{6}{5}tx + \frac{27}{10}t}
\end{aligned}$$

Die drei Bedingungen lauten damit:

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} & -\frac{1}{5}tx^3 + \frac{27}{20}tx^2 - \frac{1}{2} &= 0 \\
&\text{(II)} & -\frac{3}{5}tx^2 + \frac{27}{10}tx &= 0 \\
&\text{(III)} & -\frac{6}{5}tx + \frac{27}{10}t &\neq 0
\end{aligned}$$

Die zweite Bedingung ermöglicht es uns, gleich die möglichen Wendestellen auszumachen, indem wir tx ausklammern und mithilfe des Satzes vom Nullprodukt x_1 und x_2 bestimmen:

$$\begin{aligned}
\text{(II)}\ -\frac{3}{5}tx^2 + \frac{27}{10}tx &= 0 && \text{Ausklammern:} \\
tx\left(-\frac{3}{5}x + \frac{27}{10}\right) &= 0 && \text{Wenn ein Produkt Null werden soll, so muss einer seiner Faktoren Null sein!} \\
tx &= 0 \\
-\frac{3}{5}x + \frac{27}{10} &= 0 \\
\boldsymbol{x_1} &= \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{x_2} &= \boldsymbol{4,5}
\end{aligned}$$

Für die Lösungen x_1 und x_2 muss nun auch die erste Bedingung erfüllt sein. Setze die Werte dazu in (I) ein und löse, wenn möglich nach t auf:

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} & -\frac{1}{5}tx^3+\frac{27}{20}x^2-\frac{1}{2} &= 0 \\
&(x_1) & -\frac{1}{5}t\cdot 0^3+\frac{27}{20}t\cdot 0^2-\frac{1}{2} &= 0 \\
& & -\frac{1}{2} &= 0 && \text{Falsche Aussage!} \\
&(x_2) & -\frac{1}{5}t\cdot 4{,}5^3+\frac{27}{20}t\cdot 4{,}5^2-\frac{1}{2} &= 0 \\
& & -\frac{1}{5}t\cdot 4{,}5^3+\frac{27}{20}t\cdot 4{,}5^2-\frac{1}{2} &= 0 && \text{Nach } t \text{ auflösen:} \\
& & -18{,}2250t+27{,}3375t-0{,}5 &= 0 \\
& & 45{,}5625t &= 0{,}5 \\
& & \boldsymbol{t} &\approx \boldsymbol{0{,}05487}
\end{aligned}
$$

Für x_1 ist die erste Bedingung nicht erfüllt, daher befindet sich an der Stelle $x_1 = 0$ kein Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Für x_2 dagegen ergibt sich ein Wert für t.

Zuletzt muss diese Lösung noch auf die dritte Bedingung geprüft werden. Setzte dazu t und x_2 in (III) ein und prüfe, ob die Ungleichung stimmt:

$$
\begin{aligned}
&\text{(III)} & -\frac{6}{5}tx+\frac{27}{10}t &\neq 0 \\
& & -\frac{6}{5}\cdot 0{,}05487\cdot 4{,}5+\frac{27}{10}\cdot 0{,}05487 &\neq 0 \\
& & 0{,}2963+\frac{27}{10}\cdot 0{,}05487 &\neq 0 \\
& & \boldsymbol{0{,}1482} &\boldsymbol{\neq 0}
\end{aligned}
$$

Die dritte und hinreichende Bedingung für Sattelpunkte ist für x_2 erfüllt.

Für $t \approx 0{,}05487$ und $x = 4{,}5$ besitzt H_t somit einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente.