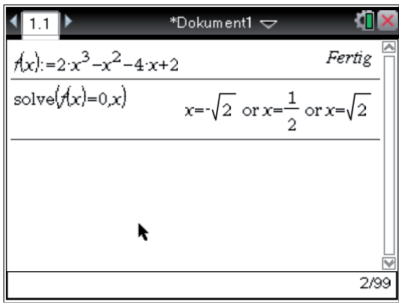
a) (1) ► **Ermitteln der Nullstellen von f** (8 P)

Die Nullstellen von $f$ kannst du mit Hilfe deines CAS berechnen. Verwende hierzu den Calculator Modus des CAS.
Die notwendige Bedingung für Nullstellen lautet:

$$f(x) = 0 = 2 \cdot x^3 - x^2 - 4 \cdot x + 2$$

Diese Gleichung kannst du mit Hilfe des `solve(..)` - Befehls lösen. Dieser Befehl löst die eingetragene Gleichung nach einer gewünschten Variablen, welche getrennt durch ein Komma, hinter die Gleichung in den Befehl einzutragen ist. Hier:

$$\texttt{solve}(0 = 2 \cdot x^3 - x^2 - 4 \cdot x + 2, x)$$




Die Nullstellen von $f$ sind:
$x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = +\sqrt{2}$.

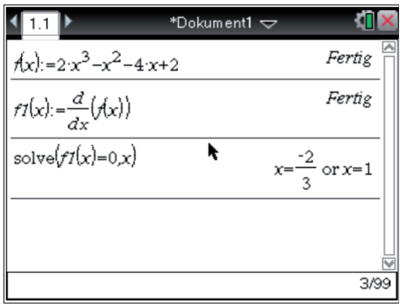
(2) ► **Berechnen der lokalen Extrempunkte des Graphen von f**

**1. Schritt: Bestimmen der Extremstellen**

Die lokalen Extrempunkte des Graphen von $f$ befinden sich da, wo die erste Ableitung $f'$ von $f$ Nullstellen besitzt. Die erste Ableitung des Graphen von $f$ kannst du mit Hilfe des Ableitungsbefehl des CAS bestimmen. Wende dazu den Ableitungsbefehl im Calculator - Modus so an:

$$\frac{\texttt{d}}{\texttt{dx}}(\texttt{f(x)})$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung $f'$ von $f$ kannst du wie im vorhergegangen Aufgabenteil ebenfalls über das CAS bestimmen.




**2. Schritt: Ermitteln der Art der Extremstellen**

Die Extremstellen con $f$ befinden sich bei $x_1 = -\frac{2}{3}$ und $x_2 = 1$. Um die Art der Extremstellen zu bestimmen, setzt du $x_1$ und $x_2$ in die zweite Ableitung $f''$ von $f$ ein. Ist der Wert der zweiten Ableitungsfunktion für eine Extremstelle größer null, so befindet sich an dieser Extremstelle ein lokales Minimum, ist der Wert der zweiten Ableitungsfunktion für eine Extremstelle hingegen kleiner null, so befindet sich ein lokales Maximum an dieser Extremstelle. Die zweite Ableitungsfunktion kannst du wie oben mit Hilfe des Ableitungsbefehles des CAS bestimmen, diese lautet:

$$f''(x) = 12 \cdot x - 2$$

Überprüfen der Extremstellen $x_1$ und $x_2$:

$$f''(x_1) = 12 \cdot (-\tfrac{2}{3}) - 2$$
$$f''(x_1) = -10$$

$\Rightarrow$ lokales Maximum.

$f''(x_2) = 12 \cdot 1 - 2$
$f''(x_2) = 10$

$\Rightarrow$ lokales Minimum.

**3. Schritt: Berechnen der y - Achsenabschnitte der Extremstellen**

Die $y$ - Koordinaten der Extremstellen von $f$ berechnest du, indem du $x_1$ und $x_2$ in die Funktionsgleichung von $f$ einsetzt:

$f(x_1) = 2 \cdot (-\frac{2}{3})^3 - (-\frac{2}{3})^2 - 4 \cdot (-\frac{2}{3}) + 2$
$f(x_1) = \frac{98}{27}$

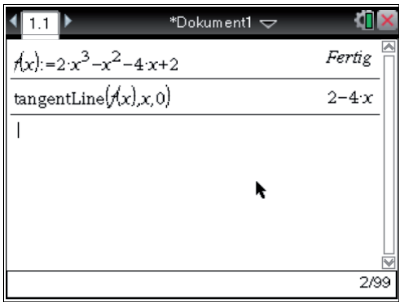
$f(x_2) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 + 2$
$f(x_2) = -1$

Der Graph der Funktion $f$ hat einen Hochpunkt bei $H(-\frac{2}{3} \mid \frac{98}{27})$ und einen Tiefpunkt bei $T(1 \mid -1)$.

b) (1) ► **Zeigen der Parallelität der Geraden** (4 P)

Verlaufen Geraden parallel, so besitzen diese die gleiche Steigung. Bevor du zeigen kannst, dass die Tangente $t$ an den Graphen von $f$ parallel zur Geraden $g$ ist, musst du diese ermitteln. Die Tangente $t$ an den Graphen von $f$ im Punkt $P$ kannst du mit dem CAS ermitteln. Verwende dazu im Calculator - Modus den `tangentLine(..)` Befehl, welchen du über diese Befehlsfolge in dein Dokument einfügst:

menu $\rightarrow$ 4: Analysis $\rightarrow$ 9: Tangententerm




In diesen Befehl trägst du die Funktion, an welche eine Tangente angelegt werden soll, die zugehörige Funktionsvariable und die Stelle, an welche die Tangente an den Graphen der Funktion angelegt werden soll, getrennt durch ein Komma ein. Hier:

`tangentLine(f(x),x,0)`

Die Gleichung der Tangenten $t$ an den Punkt $P$ lautet:

$t(x) = -4 \cdot x + 2$

Da Tangente $t$ und Gerade $g$ die gleiche Steigung besitzen ($m = -4$), hast du gezeigt, dass diese parallel verlaufen.

(2) ► **Bestimmen der Verschiebung**

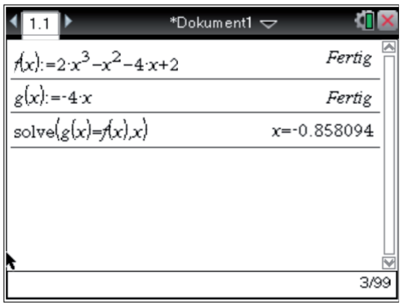
Gerade $g$ verläuft durch den Koordinatenursprung, während Tangente $t$ die $y$ - Achse bei $y = 2$ schneidet. Das bedeutet, dass die Gerade $g$ um zwei Einheiten in positiver $y$ - Richtung verschoben werden muss, damit Tangente $t$ und Gerade $g$ identisch sind.

c) (1) ► **Berechnen des Schnittpunktes von f und g** (6 P)

Den Schnittpunkt von $f$ mit der Geraden $g$ bestimmst du, indem du die Funktionsterme gleichsetzt:

$$f(x) = g(x)$$
$$2 \cdot x^3 - x^2 - 4 \cdot x + 2 = -4 \cdot x$$

Diese Gleichung kannst du ebenfalls, mit Hilfe des `solve(..)` - Befehls des CAS lösen. Verwende dazu den Befehl wie in der nebenstehenden Abbildung.



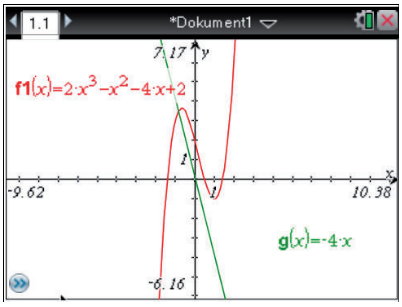

Der Schnittpunkt der Geraden $g$ mit dem Graphen von $f$ liegt bei: $x_S = -0,86$.
Die zum Schnittpunkt zugehörigen $y$ - Koordinate berechnest du durch Einsetzen von $x_S$ in eine der beiden Funktionsgleichungen. Hier:

$$g(x_S) = -4 \cdot (-0,86)$$
$$g(x_S) = 3,44$$

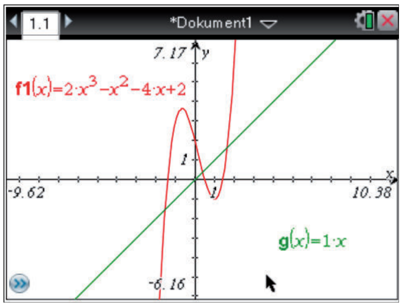
Der Schnittpunkt von Geraden $g$ mit dem Graphen der Funktion $f$ ist:
$S(-0,86 \mid 3,44)$

(2) ► **Bestimmen einer Steigung für g**

Diese Aufgabe besitzt mehrere Lösungsmöglichkeiten, im Folgenden wird eine Lösungsmöglichkeit weiter ausgeführt:




Beim Lösen dieser Aufgabe, ist es sehr hilfreich, wenn du dir die jeweiligen Graphen im Graphs - Modus deines CAS anzeigen lässt. Betrachtest du die Lage von Gerade $g$ und dem Graphen der Funktion $f$ genauer, so kannst du erkennen, dass diese bei einer größeren Steigung von $g$ weitere Schnittpunkte besitzen würden.
Erhöhe nun schrittweise die Steigung von $g$ so lange, bis du eindeutig erkennen kannst, dass der Graph von $f$ und die Gerade $g$ drei Schnittpunkte besitzen.
Hat die Gerade $g$ zum Beispiel eine Steigung von $m = 1$, besitzen $f$ und $g$ drei Schnittpunkte, wie du in der nebenstehenden Abbildung erkennen kannst.




d) (1) ► **Aussage 1** (6 P)

Die benötigte Ableitungsfunktion $f'$ hast du bereits in einem vorhergegangenem Aufgabenteil bestimmt, diese lautet:

$$f'(x) = 6 \cdot x^2 - 2x - 4$$

Die Ableitungsfunktion $f'$ besitzt Extremstellen da, wo die erste Ableitung von $f'$ Nullstellen besitzt. Die Funktionsgleichung der zweiten Ableitung $f''$ hast du ebenfalls in einem vorhergegangenem Aufgabenteil bestimmt, diese ist:

$$f''(x) = 12 \cdot x - 2$$

Extremstellen von $f'$:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
0 &= 12 \cdot x - 2 && | -12 \cdot x \\
-12 \cdot x &= -2 && | : (-12) \\
x &= \tfrac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Ob sich an dieser Extremstelle ein Hochpunkt befindet, ermittelst du über die zweite Ableitung $f'''$ des Graphen der Ableitungsfunktion $f'$. Nimmt diese für $x = \frac{1}{6}$ einen Wert kleiner null an, so befindet sich bei $x = \frac{1}{6}$ ein Hochpunkt.

Bestimmen von $f'''(x)$ und Überprüfen der Extremstelle:

$$f'''(x) = 12$$

Da $f'''(x)$ für jeden Wert von $x$ konstant größer null ist, befindet sich ein Tiefpunkt bei $x = \frac{1}{6}$.

*alternativ*

Alternativ kannst du diese Aufgabe auch durch graphisches Ableiten lösen. Die Extremstellen der zugehörigen ersten Ableitungsfunktion befinden sich da, wo der Graph von $f$ einen Wendepunkt besitzt. Betrachtest du den Graphen von $f$ genauer, so kannst du erkennen, dass die Steigung im Wendepunkt negativ ist. Ist die Steigung im Wendepunkt negativ, so besitzt der Graph der zugehörigen ersten Ableitung an dieser Stelle einen Tiefpunkt.

$\Rightarrow$ Aussage 1 ist falsch.

(2) ▶ **Aussage 2**

Beim Begründen der ersten Aussage hast du herausgefunden, dass $f'$ bei $x = \frac{1}{6}$ einen Tiefpunkt besitzt. Außerdem hast du im Aufgabenteil a) dieser Aufgabe die Nullstellen der Ableitungsfunktion $f'$ berechnet. Diese Nullstellen entsprechen gerade den Grenzen des gegebenen Intervall.
Da sich der Tiefpunkt bei $x = \frac{1}{6}$ zwischen den Nullstellen $x_1 = -\frac{2}{3}$ und $x_2 = 1$ befindet, bedeutet das, dass der Graph von $f'$ in diesem Bereich unterhalb $x$ - Achse verläuft.
$\Rightarrow$ Aussage 2 ist wahr.

(3) ▶ **Aussage 3**

Die Koordinaten des Tiefpunkts hast du bereits bestimmt, diese waren: $T(1 \mid -1)$.
Bevor du über die Steigungsformel, die Steigung der Geraden durch den Tiefpunkt $T$ und den Punkt $P$ bestimmen kannst, berechnest du den Funktionswert von $f$ an der Stelle $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 2 \cdot 0^3 - 0^2 + 4 \cdot 0 + 2 \\
f(0) &= 2
\end{aligned}
$$

Steigungsformel für Geraden:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
m &= \frac{2 - (-1)}{0 - 1} \\
m &= -3
\end{aligned}
$$

Die Steigung der Geraden zwischen Punkt $P$ und Tiefpunkt $T$ ist -3.
$\Rightarrow$ Aussage 3 ist wahr.

e) (1) ► **Zuordnen der Funktionsgleichungen** (4 P)

Bevor du entscheiden kannst, zu welchem Graphen die jeweiligen Funktionsgleichungen gehören, solltest du dir klar machen, was die jeweiligen Veränderungen an dem Graphen von $f$ bewirken.

(1) Graph der Funktion $g$:

Der Graph von $g$ geht aus dem Graphen von $f$ durch eine Stauchung mit dem Faktor $0,5$ hervor. Um nun zu entscheiden, welches das zugehörige Schaubild ist, betrachtest du die Extrempunkte der jeweiligen Graphen. Durch die Stauchung um den Faktor $0,5$ haben sich die $y$ - Koordinaten der jeweiligen Extrema halbiert.
$\Rightarrow$ der zu $g$ zugehörige Graph ist Graph 2.

(2) Graph der Funktion $h$:

Der Graph der Funktion $h$ geht durch eine Verschiebung des Graphen der Funktion $f$ um zwei Einheiten in negativer $y$ - Richtung hervor. Der Graph der Funktion $f$ schneidet die $y$ - Achse bei $y = 2$. Wird dieser Graph nun um 2 Einheiten in negativer $y$ - Richtung verschoben, so befindet sich der Schnittpunkt mit der $y$ - Achse bei $y = 0$.
$\Rightarrow$ der zu $h$ zugehörige Graph ist Graph 3.

(2) ► **Bestimmen einer Gleichung für Graph 1**

Um eine Funktionsgleichung für den Graph 1 zu bestimmen, überlegst du dir auch hier, wie dieser Graph aus dem Graphen der Funktion $f$ hervorgegangen ist:
Du kannst hier erkennen, dass der Graph 1 zu dem Graphen von $f$ gegensätzliche Extrempunkte besitzt, das heißt, dass der Graph von $f$ durch eine negative Streckung oder Stauchung an einer Spiegelachse gespiegelt wurde. Da jedoch nur das Vorzeichen der $y$ - Koordinaten gewechselt wurde, ist der Betrag der Streckung 1. Die zum Graph 1 zugehörige Funktionsgleichung lautet:

$j(x) = -1 \cdot f(x)$