Ein Oktaeder ist ein regelmäßiges Polyeder, dessen Oberfläche aus acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken besteht. Jedes Oktaeder kann einem Würfel so einbeschrieben werden, dass die Eckpunkte des Oktaeders in den Mittelpunkten der Seitenflächen des Würfels liegen (siehe Abbildung 1).

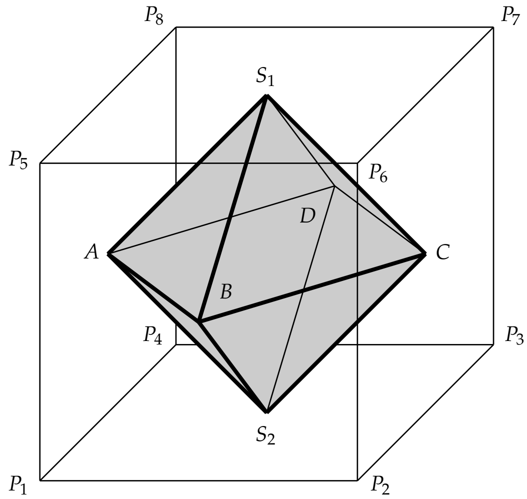

Abbildung 1

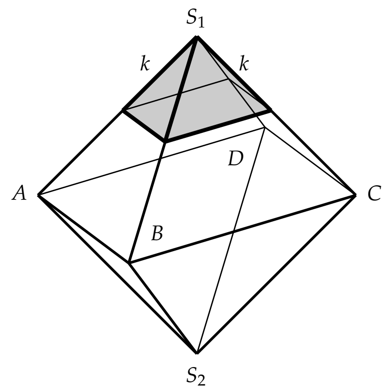

Abbildung 2

Gegeben sind die Punkte $A(13\,|-5\,|\,3)$, $B(11\,|\,3\,|\,1)$, $C(5\,|\,3\,|\,7)$ und $S_1(13\,|\,1\,|\,9)$.

a) Begründen Sie: Die Punkte $A(13\,|-5\,|\,3)$, $B(11\,|\,3\,|\,1)$ und $C(5\,|\,3\,|\,7)$ sind die Eckpunkte eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks. (8VP)

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $D$ so, dass die Punkte $A$, $B$, $C$ und $D$ ein Quadrat bilden.

b) Die Ebene $E$ enthält das Quadrat $ABCD$. (7VP)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene $E$ in Parameterform und Koordinatenform.

[Zur Kontrolle: $E$: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 27 = 0$]

c) Der Punkt $S_1(13\,|\,1\,|\,9)$, der nicht in der Ebene $E$ liegt, wird an der Ebene $E$ gespiegelt, so dass der zu $S_1$ symmetrisch liegende Spiegelpunkt $S_2$ entsteht. (11VP)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes $S_2$.

Begründen Sie: Der Körper mit den Eckpunkten $A$, $B$, $C$, $D$, $S_1$ und $S_2$ ist ein Oktaeder.

d) Das Oktaeder $ABCDS_1S_2$ ist gemäß Abbildung 1 einem Würfel so einbeschrieben, dass die Eckpunkte des Oktaeders in den Mittelpunkten der Seitenflächen dieses Würfels liegen. (10VP)

Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte $P_6$ und $P_8$ des Würfels.

e) Von dem Oktaeder $ABCDS_1S_2$ wird ein pyramidenförmiges Stück so abgeschnitten, dass die Pyramidenspitze der Punkt $S_1$ ist und die von $S_1$ ausgehenden Kanten der abgeschnittenen Pyramide die gleiche Länge $k$ haben (siehe Abbildung 2). (14VP)

Ermitteln Sie das Volumen der abgeschnittenen Pyramide für den Fall, dass ihre Kantenlänge $k$ ein Drittel der Länge der Oktaederkante $\overline{AS_1}$ beträgt.

Nun werden von allen weiteren Ecken des Oktaeders $ABCDS_1S_2$ gleich große Pyramiden mit der Kantenlänge $k$ abgeschnitten, so dass ein Restkörper $R_k$ entsteht.

Beschreiben Sie diesen Restkörper $R_k$ für den Fall $k = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AS_1}|$ hinsichtlich der Anzahl und Eigenschaften seiner Seitenflächen (Anzahl der Ecken, Seitenlängen).

Beschreiben Sie diesen Restkörper $R_k$ für den Fall $k = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AS_1}|$ hinsichtlich der Anzahl und Eigenschaften seiner Seitenflächen.