a) ► **Endpunkt des Tunnels bestimmen** (7P)

Die Aufgabe gibt dir vor, dass ein Tunnel vom Ausgangspunkt T_1 entlang eines Vektors $\overrightarrow{u}$ gegraben werden soll. Somit kannst du den Tunnel als Gerade darstellen. Der Endpunkt des Tunnels ist dann gerade der Schnittpunkt der Gerade durch T_1 mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{u}$ mit der DCS-Ebene.

Du erhältst also deine Gerade g, die den Tunnel beschreibt über

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OT} + t \cdot \overrightarrow{u}.$$

Die Ebene DCS kannst du dann über die gegebenen Punkte aufspannen:

$$DCS: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OD} + s \cdot \overrightarrow{DC} + r \cdot \overrightarrow{DS}$$

Einen Vektor $\overrightarrow{DC}$ berechnest du mit

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$$

Aus diesen Vorgaben kannst du nun die Gerade g, die den Tunnelverlauf darstellt, und die Ebene DCS, die eine Seite des Berges symbolisiert, aufstellen.

Den Schnittpunkt T_2 erhältst du dann über die Gleichung $\overrightarrow{x}_g = \overrightarrow{x}_{DCS}$ oder

$$\overrightarrow{OT_1} + t \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OD} + u \cdot \overrightarrow{DC} + r \cdot \overrightarrow{DS}$$

► **Tunnel skizzieren**

Um den Tunnel zu skizzieren musst du den Anfangspunkt T_1 und den Endpunkt T_2 in die Zeichnung eintragen und dann verbinden. Achte darauf, dass die Verbindungsstrecke nicht über die beiden Punkte hinaus geht, da der Tunnel sich nur zwischen den Punkten erstreckt und danach endet.

► **Länge des Tunnels ermitteln**

Die Länge des Tunnels wird gerade durch den Abstand der Punkte T_1 und T_2 beschrieben. Allgemein kannst du den Abstand zweier Punkte mit $P_1(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ und $P_2(y_1 \mid y_2 \mid y_3)$ über

$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ bestimmen.

Setze also die Koordinaten von T_1 und T_2 in die Formel ein, um den Abstand $d(T_1, T_2)$ zu bestimmen. Die Punkte T_1 und T_2 haben die Koordinaten

$T_1(2,4 \mid 4 \mid 0,5)$ und $T_2(-0,6 \mid -2 \mid 2)$.

b) ► **Größe des Winkels α bestimmen** (8P)

Die Größe eines Winkels α, der von zwei Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ eingeschlossen wird, kannst du über die Formel

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

bestimmen. Dabei beschreibt $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ das Skalarprodukt von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$. Der Betrag eines Vektors beschreibt seine Länge.

Nach diesen Vorgaben kannst du nun den Winkel zwischen den Vektoren bestimmen. Die Vektoren $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{AB}$ kannst du berechnen mit

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA}$

Berechne also zunächst die Vektoren, die den Winkel α einschließen und berechne dann über die oben stehende Formel den Winkel α.

▶ Winkel β berechnen

Den Winkel β berechnest du analog zum Winkel α. Es ergeben sich die Vektoren $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{AO}$, die den Winkel β einschließen.

▶ Allgemeine Größe des Winkels α_P bestimmen

Gehe auch hier genauso vor wie bereits in den konkreten Fällen von α und β. Der Punkt P hat allgemein die Koordinaten $P(0 \mid p \mid 0)$. Stelle mit diesem allgemeinen Punkt den Vektor $\overrightarrow{AP}$ auf.

▶ Aussagen beurteilen

Wenn du eine Aussage beurteilen sollst, so kann diese wahr oder falsch sein. Folglich musst du beide Möglichkeiten in Betracht ziehen.
Um die Aussage beurteilen zu können, solltest du dir folglich zunächst ein Bild davon machen, wie sich der Winkel α_p im Abhängigkeit von p verhält. Dazu kannst du α_p als Funktion in deinen Rechner eingeben. Im Graph Modus kannst du dir ein Bild davon machen, wie sich der Winkel in Abhängigkeit von p verhält.