a) **Füllhöhe im mit 200 l gefüllten Behälter** (5BE)

Für das Volumen des Körpers gilt

$V = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Halbkugel}}$

$V = \pi r^2 h - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = \pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi r^3$

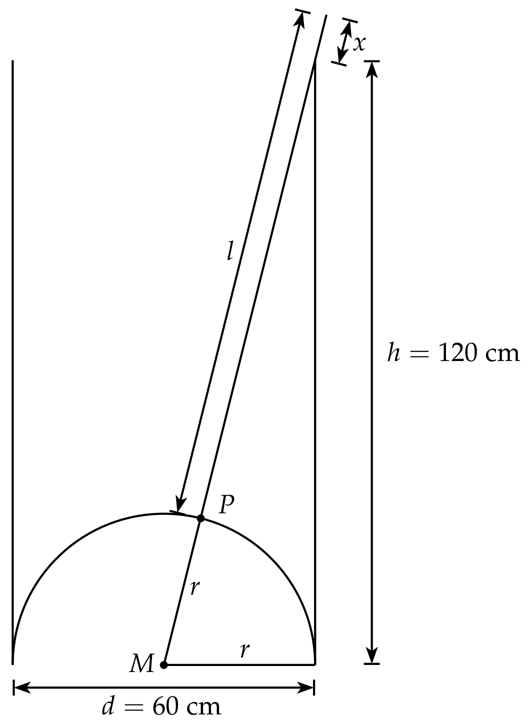
Das Volumen V ist mit $V = 200\ \text{l} = 200\ \text{dm}^3$ sowie der Radius r mit $r = \frac{d}{2} = 30\ \text{cm} = 3\ \text{dm}$ gegeben, die Füllhöhe h ist gesucht. Die gegebene Volumengleichung wird nun also nach h aufgelöst und die gegebenen Werte eingesetzt:

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi r^3 && \left| + \tfrac{2}{3}\pi r^3 \right. \\ \pi r^2 h &= V + \frac{2}{3}\pi r^3 && \left| : \pi r^2 \right. \\ h &= \frac{V + \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2} \\ h &= \frac{200\ \text{dm}^3 + \frac{2}{3}\pi \cdot (3\ \text{dm})^3}{\pi \cdot (3\ \text{dm})^2} \\ h &\approx 9{,}07\ \text{dm} \end{aligned}$$

Wenn sich im Behälter 200 l Flüssigkeit befinden, steht diese in ihm etwa 90,7 cm hoch.

Maximal mögliche Stablänge außerhalb des Behälters

Skizze:



Der Stab ragt mit der maximalen Länge heraus, wenn er direkt zum Mittelpunkt M der Halbkugel zeigt.
Für die Länge L vom Punkt M bis zur Oberkante des Behälter gilt mithilfe des Satzes von Pythagoras

$$L^2 = r^2 + h^2$$
$$L = \sqrt{r^2 + h^2}$$
$$L = \sqrt{(30\text{ cm})^2 + (120\text{ cm})^2}$$
$$L = \sqrt{21240\text{ cm}^2}$$
$$L \approx 123{,}69\text{ cm}$$

Der Stab berührt die Halbkugel im Punkt P. Der Abstand von diesem Punkt zur Oberkante entspricht der Länge L, vermindert um den Radius R des Kreises. Durch Subtrahieren dieser erhaltenen Länge von der Länge des Stabs l wird die gesuchte Länge x des herausragenden Endes des Stabs berechnet. Es gilt also:

$$x = l - (L - r)$$
$$x = 100\text{ cm} - (123{,}69\text{ cm} - 30\text{ cm})$$
$$x = 6{,}3\text{ cm}$$

Das Ende des Stabes kann maximal 6,3 cm aus dem Behälter herausragen.

b) **Radius eines solchen Behälters mit maximalem Volumen** (5BE)

Für das Volumen des Behälter gilt als Funktion in Abhängigkeit vom Radius r und der Höhe h (siehe oben):

$$V(r, h) = \pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi r^3 \qquad \text{(Hauptbedingung)}$$

Für den Oberflächeninhalt O gilt $O = 75\text{ dm}^2$. Der Obeflächeninhalt besteht aus der Mantelfläche des Kreiszylinders und der Oberfläche der Halbkugel, es gilt also:

$$O = \underbrace{2\pi rh}_{O_{\text{Zylinder}}} + \underbrace{2\pi r^2}_{O_{\text{Halbkugel}}} = 75$$

Auflösen nach h:

$$O = 75 = 2\pi rh + 2\pi r^2 \qquad | - 2\pi r^2$$
$$2\pi rh = 75 - 2\pi r^2 \qquad | : 2\pi r$$
$$h = \frac{75 - 2\pi r^2}{2\pi r} \qquad \text{(Nebenbedingung)}$$

Durch Einsetzen der Nebenbedingung in die Zielfunktionsgleichung erhält man somit (V in dm^3, r in dm):

$$V(r) = \pi r^2 \frac{75 - 2\pi r^2}{2\pi r} - \frac{2}{3}\pi r^3$$
$$V(r) = \frac{75r - 2\pi r^3}{2} - \frac{2}{3}\pi r^3$$
$$V(r) = \frac{75}{2}r - \pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$
$$V(r) = \frac{75}{2}r - \frac{5}{3}\pi r^3$$

Um den Radius bei maximalem Volumen zu erhalten, wird die Funktion V mit dem GTR gezeichnet und die Koordinaten des Hochpunktes abgelesen, wobei der x-Wert dem maximalen Radius und der y-Wert dem maximalen Volumen entspricht. Der GTR liefert hier den Hochpunkt bei etwa $E_{max}(1,5|38,6)$.

Bei maximalem Volumen hat der Behälter mit Oberflächeninhalt $O = 75\ \text{dm}^3$ einen Radius von $r \approx 1,5$ dm.