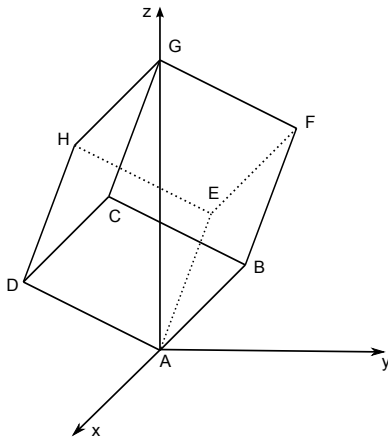


2.1 ► Kantenlänge ermitteln



Die Kanten eines Würfels sind alle gleich lang.

Du hast die Punkte B , D und F gegeben, wobei B und F über eine Kante des Würfels verbunden sind.

Um die Kantenlänge des Würfels zu berechnen, verwendest Du zuerst den Vektor \vec{BF} und danach den Betrag des Vektors.

1. Schritt: Berechnen des Vektors \vec{BF}

$$\vec{BF} = \vec{OF} - \vec{OB}$$

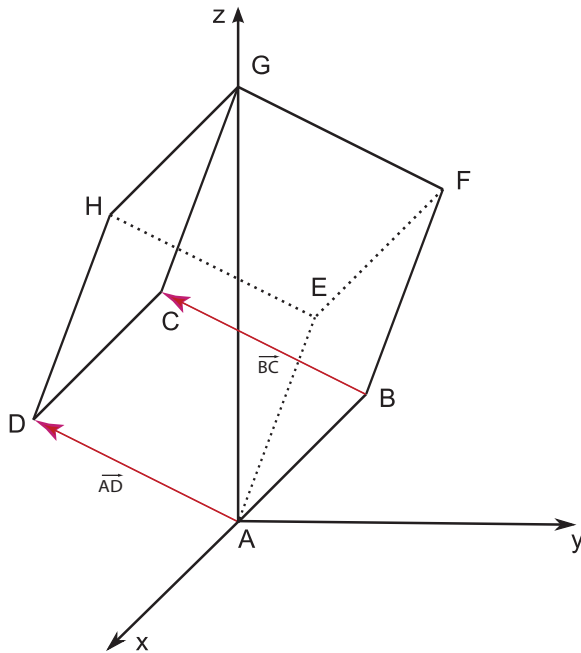
$$\vec{BF} = \begin{pmatrix} -2,86 \\ 4,95 \\ 8,08 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,86 \\ 4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,86 & - & 2,86 \\ 4,95 & - & 4,95 \\ 8,08 & - & 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,72 \\ 0 \\ 4,04 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Betrag des Vektors \vec{BF}

$$|\vec{BF}| = \left| \begin{pmatrix} -5,72 \\ 0 \\ 4,04 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-5,72)^2 + 0^2 + 4,04^2} = 7,00$$

Die Kantenlänge des Würfels beträgt 7,00 m.

► **Koordinaten des Punktes C nachweisen**



Die Kanten eines Würfels sind alle gleich lang, deshalb gilt: $\vec{AD} = \vec{BC}$
 Die Koordinaten von C sind unbekannt, aber der Vektor \vec{BC} hat die gleiche Richtung wie \vec{AD} .
 Der Vektor \vec{AD} beschreibt lediglich die Länge, ist also unabhängig, somit kannst du eine Vektorkette aus $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{AD}$ bilden.

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} 2,86 \\ 4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,86 \\ -4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,86 + 2,86 \\ 4,95 + (-4,95) \\ 4,04 + 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,72 \\ 0,00 \\ 8,08 \end{pmatrix}$$

Damit hast du die Koordinaten für C(5,72 | 0,00 | 8,08) nachgewiesen.

2.2 ► **Abstand berechnen**

Der höchste Punkt des Würfels ist der Punkt G, welcher auf der z-Achse des Koordinatensystems liegt.

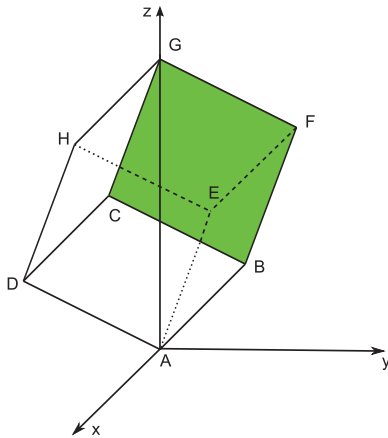
Die Koordinaten von G sind unbekannt, aber der Vektor \vec{FG} hat die gleiche Richtung wie \vec{AD} , somit kannst du eine Vektorkette aus $\vec{OG} = \vec{OF} + \vec{AD}$ bilden.

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} -2,86 \\ 4,95 \\ 8,08 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,86 \\ -4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,86 + 2,86 \\ 4,95 + (-4,95) \\ 8,08 + 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 12,12 \end{pmatrix}$$

Die z-Koordinate des Punktes G ist ausschlaggebend für die Höhe des Würfels.

Der Abstand des höchsten Punktes des würfelförmigen Baukörpers zum Boden (x-y-Koordinatenebene) beträgt 12,12 m.

2.3 ▶ Ebenengleichung aufstellen und Winkel berechnen



Um diese Aufgabe zu lösen, musst du zuerst eine Ebenengleichung aufstellen und danach den Neigungswinkel der Ebene berechnen.

1. Schritt: Ebenengleichung aufstellen

Um eine Ebenengleichung aufstellen zu können brauchst du 3 Punkte auf der zu bildenden Ebene.

Wähle einen Ortsvektor aus, von dem du 2 Richtungsvektoren aufspannst.

Du hast die Punkte B, C, F und G gegeben oder in den vorherigen Teilaufgaben berechnet. Alle 4 Punkte sollen auf der Ebene liegen.

Die Ebenengleichung sieht dann wie folgt aus:

$$E_{BFCG} = \vec{x} = \vec{OB} + r \cdot \vec{BC} + s \cdot \vec{BF}$$

$$\vec{OB} = \begin{pmatrix} 2,86 \\ 4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \vec{C} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 5,72 \\ 0,00 \\ 8,08 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,86 \\ 4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,72 - 2,86 \\ 0,00 - 4,95 \\ 8,08 - 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,86 \\ -4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BF} = \vec{F} - \vec{B} = \begin{pmatrix} -2,86 \\ 4,95 \\ 8,08 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,86 \\ 4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,86 - 2,86 \\ 4,95 - 4,95 \\ 8,08 - 4,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,72 \\ 0,00 \\ 4,04 \end{pmatrix}$$

$$E_{BFCG} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,86 \\ 4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2,86 \\ -4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5,72 \\ 0,00 \\ 4,04 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Neigungswinkel berechnen

Du sollst nun den Neigungswinkel zwischen der Ebene $BFCG$ und der Ebene $x_3 = 0$ (also der Horizontalebene) berechnen.

Den Winkel zwischen zwei Ebenen berechnest du mit der Formel $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

Ein Normalenvektor steht orthogonal zur Ebene und lässt sich mit dem Kreuzprodukt berechnen.

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2,86 \\ -4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5,72 \\ 0,00 \\ 4,04 \end{pmatrix}$$
$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -4,95 \cdot 4,04 - 4,04 \cdot 0 \\ 4,04 \cdot (-5,72) - 2,86 \cdot 4,04 \\ 2,86 \cdot 0 - (-4,95) \cdot (-5,72) \end{pmatrix}$$
$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -20,00 \\ -34,66 \\ -28,31 \end{pmatrix}$$

Den Normalenvektor der Ebene $x_3 = 0$ kannst du aus der Ebenengleichung ablesen.

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt berechnest du noch den Betrag des jeweiligen Normalenvektors:

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{(-20,00)^2 + (-34,66)^2 + (-28,31)^2}$$

$$|\vec{n}_1| \approx 49,02$$

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}$$

$$|\vec{n}_2| = 1$$

Nun kannst du die Formel anwenden:

$$\cos \alpha = \frac{|(-20,00) \cdot 0 + (-34,66) \cdot 0 + (-28,31) \cdot 1|}{49,02 \cdot 1}$$

$$\cos \alpha = \frac{|-28,31|}{49,02}$$

$$\alpha = 54,7^\circ$$

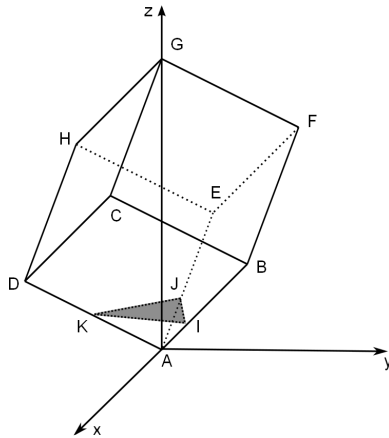
Der Neigungswinkel der Ebene beträgt $54,7^\circ$. Solarkollektoren die parallel zur Seitenfläche $BCFG$ angebracht werden haben keinen hohen Wirkungsgrad, da der Neigungswinkel größer als 50° ist.

2.4 ► Ebenengleichung, Koordinaten eines Punktes und Volumen berechnen

1. Schritt: Ebenengleichung aufstellen

Die Ebene W liegt im würfelförmigen Baukörper. Die Punkte I , J und K liegen auf der Ebene. Du weißt, dass die Ebene parallel zur x - y -Koordinatenebene verläuft, somit geben dir die z -Koordinaten der Punkte I und J Auskunft über die Ebenengleichung.

$$W : z = 2,42$$



2. Schritt: Koordinaten des Punktes K nachweisen

Der Punkt K liegt auf der Ebene, somit muss die z-Koordinate 2,42 betragen.

Des Weiteren liegt der Punkt K auf der Kante \overline{AD} , also müssen seine Koordinaten die folgende Gleichung erfüllen:

$$g_{AD}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2,86 \\ -4,95 \\ 4,04 \end{pmatrix}$$

Um zu überprüfen ob K auf der Kante \overline{AD} liegt, setzt du die Koordinaten in die Gleichung ein:

$$\begin{aligned} 1,71 &= 2,86t && \Rightarrow t_1 = 0,60 \\ -2,97 &= -4,95t && \Rightarrow t_2 = 0,60 \\ 2,42 &= 4,04t && \Rightarrow t_3 = 0,60 \end{aligned}$$

Da $t_1 = t_2 = t_3 = 0,60$, liegt K auf der Kante \overline{AD} , somit sind die Koordinaten des Punktes nachgewiesen.

3. Schritt: Anteil Volumen des Körpers AIJK vom Gesamtvolumen berechnen

In der Aufgabe ist nach dem Anteil des Volumens des Körpers AIJK am Gesamtvolumen des würfelförmigen Baukörpers gefragt.

Das Volumen eines Würfels berechnet sich aus Länge · Breite · Höhe. Da alle Seiten des Würfels gleich lang sind, gilt für das Volumen eines Würfels:

$$V = a^3$$

Hier in der Aufgabe ergibt sich also ein Volumen des würfelförmigen Baukörpers von:

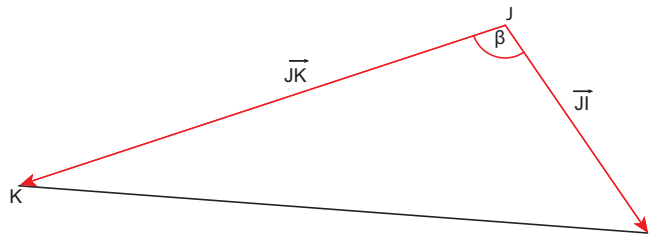
$$\begin{aligned} V_W &= \overline{AD}^3 \\ V_W &= (7,00\text{m})^3 \\ V_W &= 343,00\text{m}^3 \end{aligned}$$

Den Körper AIJK kann man mit einer Pyramide vergleichen und somit die Volumenformel $V_P = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h_P$ anwenden.

Es wird also die Grundfläche (hier Dreieck) und die Höhe der Pyramide gesucht.

Die Höhe der Pyramide beschreibt den Abstand zwischen der Ebene W und der x-y-Koordinatenebene und beträgt $h = 2,42$.

Die Grundfläche kann wie folgt berechnet werden:



Weg 1: Kreuzprodukt

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot |\vec{JK} \times \vec{JI}|$$

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 5,14 \\ -2,97 \\ 0,00 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5,14 \\ 2,97 \\ 0,00 \end{pmatrix} \right|$$

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -2,97 \cdot 0,00 & - & 0,00 \cdot 2,97 \\ 0,00 \cdot 5,14 & - & 5,14 \cdot 0,00 \\ 5,14 \cdot 2,97 & - & -2,97 \cdot 5,14 \end{pmatrix} \right|$$

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 30,53 \end{pmatrix} \right|$$

$$A_G = \frac{1}{2} \sqrt{30,53^2}$$

$$A_G \approx 15,27$$

Weg 2: Sinussatz

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot |\vec{JK}| \cdot |\vec{JI}| \cdot \sin \beta$$

mit:

$$\vec{JK} = \begin{pmatrix} 5,14 \\ -2,97 \\ 0,00 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{JK}| = \sqrt{5,14^2 + (-2,97)^2 + 0^2} = \sqrt{35,24} \approx 5,94$$

$$\vec{JI} = \begin{pmatrix} 5,14 \\ 2,97 \\ 0,00 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{JI}| = \sqrt{5,14^2 + 2,97^2 + 0^2} = \sqrt{35,24} \approx 5,94$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{JK} \circ \vec{JI}}{|\vec{JK}| \cdot |\vec{JI}|}$$

$$\cos \beta = \frac{5,14^2 - 2,97^2 + 0^2}{\sqrt{35,24} \cdot \sqrt{35,24}}$$

$$\beta = 60,04^\circ$$

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{35,24} \cdot \sqrt{35,24} \cdot \sin 60,04^\circ$$

$$A_G \approx 15,27$$

Jetzt kannst du das Volumen der Pyramide vollständig berechnen:

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot 15,27 \cdot 2,42$$

$$V_P \approx 12,32$$

Zum Schluss berechnest du den Anteil der Pyramide vom Würfel:

$$\frac{V_W}{V_P} = \frac{12,32\text{m}^3}{343,00\text{m}^3}$$
$$\frac{V_W}{V_P} \approx 3,6\%$$

Der Anteil des Volumens des Körpers AJK beträgt 3,6 % des Gesamtvolumens.

2.5 ► Erwartungswert berechnen

Du hast gegeben, dass es 80 Interessenten für ein Haus gibt, aber erfahrungsgemäß nur 5 % der Interessenten wirklich kaufen.

Es ist gefragt wie viele Käufer unter den 80 Interessenten zu erwarten ist, mit X =Anzahl der Käufer, n =Anzahl der Interessenten und P =Wahrscheinlichkeit eines Kaufes.

$$E(X) = n \cdot p$$

$$E(X) = 80 \cdot 0,05$$

$$E(X) = 4$$

Unter den 80 Interessenten sind 4 Käufer zu erwarten.

► Wahrscheinlichkeiten berechnen

Im zweiten Teil der Aufgabe ist nach der Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse gefragt.

Ereignis A: Mindestens drei dieser Interessenten kaufen ein derartiges Haus.

Die Zufallsvariable X kann als binomialverteilt angenommen werden:

- entweder ein Interessent kauft ein Haus oder nicht
- die Wahrscheinlichkeit von 5 % für ein Hauskauf bleibt unverändert
- die einzelnen Interessenten sind unabhängig voneinander

Die Parameter für die Binomialverteilung sind also $n = 80$ und $p = 5\%$.

$P(A) = P(X \geq 3)$ ist gesucht. Der Taschenrechner kann so eine Form nicht auswerten. Du musst also das Gegenereignis formulieren.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(\leq 2)$$

Über die folgende Tastenkombination kannst du das Gegenereignis berechnen:

`STAT → DISTR → DIST → BINM → Bcd`

Numtrial ist die Anzahl der Beobachtungen

p beschreibt die Wahrscheinlichkeit

x beschreibt das Gegenereignis (≤ 2)

```
Binomial C.D
Data      :Variable
x         :2
Numtrial :80
P         :0.05
Save Res :None
Execute
```

```
Binomial C.D
P=0.2306205
```

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A beträgt: $P(A) = 1 - 0,2306 = 0,7694$. (76,94 %)

Ereignis B: Der zehnte dieser Interessenten ist der erste Käufer.

Das bedeutet die ersten 9 Interessenten sind keine Käufer.

$$P(B) = 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,05$$

$$P(B) = 0,95^9 \cdot 0,05$$

$$P(B) = 0,0315$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B beträgt 3,15 %.

2.6 ► Binomialverteilung berechnen

Es ist gefragt wie viele Interessenten es geben muss, damit zu mehr als 90 % ein Käufer unter den Interessenten ist.

Rechnerisch formuliert würde das bedeuten: $P(X \geq 1) > 0,9$. Diese Form kann aber nicht ausgewertet werden, du musst also das Gegenereignis bilden.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) > 0,9$$

$$1 - P(X = 0) > 0,9 \quad | -1$$

$$-P(X = 0) > -0,1 \quad | \cdot (-1)$$

$$P(X = 0) < 0,1$$

Das Gegenereignis kann als binomialverteilt angenommen werden:

- entweder ein Interessent kauft ein Haus oder nicht
- die Wahrscheinlichkeit von 5 % für ein Hauskauf bleibt unverändert
- die einzelnen Interessenten sind unabhängig voneinander

Die Parameter für die Binomialverteilung sind also $n =$ unbekannt und $p = 5\%$ und $X = k = 0$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^{n-0} < 0,1$$

$$1 \cdot 1 \cdot 0,95^n < 0,1 \quad | \ln()$$

$$n \cdot \ln(0,95) < \ln(0,1) \quad | : \ln(0,95) \quad \text{Achtung: } \ln(0,95) < 0$$

$$n > \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,95)}$$

$$n > 44,89$$

Es muss mindestens 45 Interessenten geben, damit zu mehr als 90 % ein Käufer dabei ist.