a) **▶ Parameter a und k bestimmen** (12P)

Betrachtet wird die Mäusepopulation in den ersten 50 Tagen. Diese wächst in dieser Zeit laut Aufgabenstellung exponentiell mit f, wobei

$f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$

gilt. Um die Parameter a und k zu bestimmen, kannst du die Daten für $x = 0$ und $x = 40$ verwenden. Aus der Tabelle kannst du an diesen Stellen die Funktionswerte

$f(0) = 50$ und

$f(40) = 350$ entnehmen.

Setzt du $x = 0$ in die Funktionsgleichung von f ein, fällt der Parameter k aus der Gleichung raus. Du kannst also mithilfe des Wertepaares für $x = 0$ den Wert für den Parameter a bestimmen und mit diesem Ergebnis und dem anderen Wertepaar anschließend k berechnen.

▶ Mäusepopulation im Lagerhaus nach 47 Tagen berechnen

Laut Aufgabenstellung kann der Mäusebestand in Abhängigkeit der Zeit in den ersten 50 Tagen durch eine Exponentialfunktion f beschrieben werden. Die Parameter ihrer Funktionsgleichung hast du soeben bestimmt. Die Funktionsgleichung von f lautet:

$f(x) = 50 \cdot e^{0{,}04865 \cdot x}$

Die Mäusepopulation nach 47 Tagen kann mithilfe dieser Funktion berechnet werden, da $47 < 50$ ist. Setze also $x = 47$ in die Funktionsgleichung von f ein und berechne den Bestand der Mäuse im Lagerhaus zu diesem Zeitpunkt.

▶ Den Tag bestimmen, an dem die Anzahl von 400 Mäusen überschritten wird

Gesucht ist der Tag x_1, in dessen Verlauf die Population $f(x)$ die Zahl 400 überschreitet. Da die Exponentialfunktion f aufgrund der positiven Werte für k und a streng monoton steigend ist, kannst du den Zeitpunkt bestimmen, zu dem die Population genau 400 beträgt. Ab diesem Moment ist die Zahl der Mäuse im Lagerhaus in jedem Fall größer als 400.

Setze also

$f(x) = 400$

und löse nach dem Zeitpunkt x auf.

▶ Tag bestimmen, an dem die Zuwachsrate erstmals mehr als 10 Mäuse beträgt

Die Zuwachsrate der Mäuse im Lagerhaus entspricht gerade der Änderungrate der Funktion f für ihren Bestand. Die Änderungsrate einer Funktion ist wiederum durch ihre erste Ableitung bestimmt.

Du kannst also die erste Ableitung f' von f bilden und anschließend mit dem CAS den ersten Zeitpunkt x_2 ermitteln, zu dem $f'(x)$ den Wert 10 überschreitet.

b) **▶ Grenzwert begründen und im Sachzusammenhang erläutern** (13P)

Ab dem 150. Tag soll die Mäusepopulation durch beschränktes Wachstum beschrieben werden können mit der Funktionsvorschrift:

$g(x) = 5.000 - 500.000 \cdot e^{-0{,}05 \cdot x}$

Um den Grenzwert zu bilden, kannst du das Verhalten von g für sehr große x betrachten, das heißt, wir lassen x gegen ∞ laufen.

Welche Bedeutung hat dieser Grenzwert im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung?

Der Grenzwert einer beschränkt wachsenden Funktion gibt immer an, gegen welchen Wert die Funktionswerte „auf lange Sicht" streben.

► Tag bestimmen, an dem 99 % des maximalen Bestandes überschritten werden

Auch in dieser Aufgabe wird beschränktes Wachstum für die Mäusepopulation angenommen. Zuvor hast du bestimmt, dass die zugehörige Funktionsvorschrift langfristig gegen den Wert 5.000 strebt.

Da der Substrahend in der Funktionsvorschrift aufgrund der e-Funktion mit dem negativen Exponenten kontinuierlich kleiner wird und gegen Null strebt, ist g insgesamt monoton steigend. Dies kannst du mit dem CAS überprüfen, indem du die Ableitung bildest und deren Schaubild auf Schnittpunkte mit der x-Achse überprüfst. Daraus folgt: Der Grenzwert 5.000 ist zugleich der maximal mögliche Bestand.

99 % des maximalen Bestandes ergeben dann

$0,99 \cdot 5.000 = 4.950$

Mäuse. Gesucht ist nun der Zeitpunkt x_3, zu dem g den Wert 4.950 annimmt. Genau dann erreicht die Anzahl der Mäuse 99 % des maximal möglichen Bestandes.

► Graphen von g und die Asymptote in das Koordinatensystem der Anlage skizzieren

Zum ungefähren Skizzieren reicht es, eine kleine Wertetabelle anzulegen. Nimm dazu Werte für x, für die die Funktion g auf jeden Fall positive Werte annimmt, damit du die entsprechenden Punkte auch in das Koordinatensystem einzeichnen kannst.

Die Stelle x, an der die Funktion g gerade den Wert Null annimmt, kannst du mithilfe deines CAS ermitteln.

Du kannst ebenso mithilfe des CAS eine Wertetabelle generieren. Wenn du nun verschiedene Werte für x einsetzt, erhältst du sofort die entsprechenden Funktionswerte an diesen Stellen.

Die Asymptote ist nun diejenige Gerade, an die sich der Graph von g langfristig annähert. Du weißt, dass g gegen den Grenzwert 5.000 strebt. Er nähert sich also einer konstanten Geraden mit der Vorschrift

$y = 5.000$

an.

▶ Möglichkeiten und Grenzen der verwendeten Modelle erläutern

Betrachten wir die Abbildung mit den beiden Graphen von f und g und den Wertepaaren. Du kannst erkennen:

- Für Wertepaare mit $x < 50$ stimmt der Graph von f mit diesen nahezu überein.
- Ab $x = 50$ steigt f immer schneller, die Übereinstimmung mit den Wertepaaren geht verloren.
- Zwischen $x = 50$ und $x = 150$ ist ebenso kaum Übereinstimmung mit dem Graph von g vorhanden.
- Für $x > 150$ stimmt dann der Graph von g fast mit den Wertepaaren in diesem Bereich überein.

c) **▶ Ableiten von g ohne CAS** (10P)

g' stellt die erste Ableitung der Funktion g dar, $g'(x)$ ist demnach der Funktionsterm der Ableitung. Zu zeigen ist, dass dieser die Form

$g'(x) = 25.000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05 \cdot x}$

aufweist. Bilde dazu die erste Ableitung von g mithilfe der **Kettenregel**.

▶ $g'(160)$ im Sachzusammenhang erläutern

Die Funktion g beschreibt den Bestand der Mäuse im Lagerhaus in Abhängigkeit der Zeit. Die erste Ableitung von g stellt die momentane Änderungsrate dieser Funktion dar, also die Änderungsrate des Bestands der Mäuse.

$g'(160)$ stellt damit die Änderungsrate der Population zum Zeitpunkt $x = 160$, also nach dem 160. Tag, beziehungsweise zu Beginn des 161. Tages dar.

▶ Bestimmen, wann die momentane Änderungsrate gleich der durchschnittlichen ist

Zuvor haben wir die momentane Änderungsrate g' von g zu

$g'(x) = 25.000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05 \cdot x}$

bestimmt. Gesucht ist nun der Zeitpunkt x, zu dem g' genauso groß wird, wie die durchschnittliche Änderungsrate zwischen dem 150. und dem 200. Tag.

Allgemein wird die durchschnittliche Änderungsrate M einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a;b]$ mit der Formel

$$M = \frac{\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

berechnet. Zum gesuchten Zeitpunkt gilt dann:

$M = g'(x)$

In unserem Fall entsprechen die Werte für die Intervallgrenzen $a = 150$ und $b = 200$, die Funktion f' entspricht g'.

d) **► Einfluss von S auf den Schnittpunkt mit der y-Achse und die Asymptote begründen** (9P)

Gegeben ist eine Parameterfunktion g_S mit der Gleichung:

$g_S(x) = S - S \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05 \cdot x}$

Wir wollen nun zunächst untersuchen, wie sich der Funktionsgraph im Schnittpunkt mit der y-Achse verhält und welchen Einfluss der Parameter S auf das Verhalten hat.

Im Schnittpunkt mit der y-Achse ist der x-Wert Null. Du kannst also den Funktionswert von g_S an der Stelle $x = 0$ berechnen und das Ergebnis im Hinblick auf den Einfluss von S betrachten.

Betrachten wir den Einfluss von S auf die Asymptote. Zuvor hast du festgestellt, dass die Asymptote eine konstante Funktion ist. Der Wert dieser Funktion ist in unserem Fall gleich dem Grenzwert von g_S für sehr große x, also für $x \to \infty$.

► Prüfen, ob $\frac{1}{2}S$ von allen g_S an der gleichen Stelle erreicht wird

Gesucht ist die Stelle x, an der die Parameterfunktion g_S den Wert $\dfrac{1}{2}S$ annimmt, an der also gilt:

$g_S(x) = \dfrac{1}{2}S$

Das gesuchte x ist nun gerade dann für alle g_S gleich, wenn das Ergebnis nicht vom Parameter S abhängt. Löse also die obige Gleichung nach x auf und prüfe das Ergebnis auf Unabhängigkeit von S.

► Aussage beweisen

Übersetze die Aufgabe zunächst wieder: Die lokale Änderungsrate ist die Änderungsrate an einer bestimmten Stelle x. Sie wird dir gegeben durch die erste Ableitung g'. Die Behauptung ist also: Wenn S verdoppelt wird, so verdoppelt sich der Wert der Ableitung an jeder Stelle x. Dies kannst du auch in Formeln aufschreiben.

Wenn g_S die Funktion mit dem „normalen“ Wert für S ist, dann ist $g_{2 \cdot S}$ die Funktion, bei der der Wert von S verdoppelt wurde. Sie hat die Funktionsgleichung
$g_{2S}(x) = 2S - 2S \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05x}$.

Wenn sich nun mit Verdopplung von S auch jeder Ableitungswert verdoppeln soll, dann müsste gelten:
$g'_{2 \cdot S}(x) = 2 \cdot g'_S(x)$.
Weise dies nach.