$H_1(6 \mid 0 \mid 0)$; $H_2(0 \mid 6 \mid 0)$; $H_3(0 \mid 0 \mid 6)$; $H_4(6 \mid 6 \mid 6)$; $C(3 \mid 3 \mid 3)$

a) **► Nachweis des Normalenvektors von der Ebene $\mathbf{E_{CH_1H_2}}$** (9BE)

Für den Vektor $\overrightarrow{H_3H_4}$ gilt zunächst:

$$\overrightarrow{H_3H_4} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um diesen Vektor als Normalenvektor zu identifizieren, muss der Normalenvektor zunächst auf die "klassische" Weise ermittelt werden. Dazu wird die Ebene E in Parameterform aufgestellt:

E: $\vec{x} = \overrightarrow{OC} + r \cdot \overrightarrow{CH_1} + s \cdot \overrightarrow{CH_2}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right] + s \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor dieser Ebene entspricht dem Kreuzprodukt ihrer beiden Spannvektoren:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot (-3) - (-3) \cdot 3 \\ (-3) \cdot (-3) - 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 3 - (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im letzten Schritt wurde innerhalb des Vektors mit 18 gekürzt, da der Normalenvektor ein Richtungsvektor ist. Daher ist dies auch zulässig!

Da der Vektor $\overrightarrow{H_3H_4}$ ebenfalls ein Normalenvektor sein soll, darf auch innerhalb dieses Vektors gekürzt werden. Dies führt auf:

$$\overrightarrow{H_3H_4} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n}_E$$

Damit ist nachgewiesen, dass der Vektor $\overrightarrow{H_3H_4}$ ein Normalenvektor der Ebene ist.

► Aufstellen der Ebenengleichung in Koordinatenform

Mit dem Normalenvektor und dem Stützvektor $\overrightarrow{OC}$ der Ebene ergibt sich in Normalen- und damit auch in Koordinatenform:

$$E: \quad \vec{n}_E \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OC} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$1x + 1y + 0z - (3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = 0$$

$$x + y - 6 = 0$$

▶ Berechnung der Koordinaten des Durchstoßpunktes

Um den Durchstoßpunkt S von der Strecke $\overline{H_3H_4}$ und der Ebene E zu ermitteln, wird eine Gerade g durch diese beiden Punkte aufgestellt und damit anschließend der Durchstoßpunkt berechnet.

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OH_3} + t \cdot \overrightarrow{H_3H_4}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie, dass auch hier die gekürzte Form des Vektors $\overrightarrow{H_3H_4}$ verwendet werden darf, da er hier ebenfalls als Richtungsvektor verwendet wird.

Durch Einsetzen der Koordinaten der Geraden in die Koordinatenform der Ebene wird der entsprechende t-Wert für den Ortsvektor von S ermittelt:

$$\begin{aligned} g \cap E\colon \quad (0+1r)+(0+1r)-6 &= 0 \\ 2r &= 6 \\ r &= 3 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Geradengleichung ergibt den Ortsvektor des Durchstoßpunktes:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(3 \mid 3 \mid 6)$$

Der Durchstoßpunkt hat die Koordinaten $S(3 \mid 3 \mid 6)$.

▶ Charakterisierung der Lage des Durchstoßpunktes auf der Strecke $\overline{\mathbf{H_3H_4}}$

Vergleicht man die Koordinaten der drei Punkte, ergibt sich:

$$H_3(0 \mid 0 \mid 6) \quad - \quad S(3 \mid 3 \mid 6) \quad - \quad H_4(6 \mid 6 \mid 6)$$

Der Durchstoßpunkt ist also der **Mittelpunkt** der Strecke $\overline{H_3H_4}$.

▶ Schlussfolgerung der Lage der Punkte $\mathbf{H_3}$ und $\mathbf{H_4}$ bezüglich E

Die Strecke $\overline{H_3H_4}$ verläuft senkrecht zur Ebene E, da der Vektor $\overrightarrow{H_3H_4}$ ein Normalenvektor der Ebene ist. Da die Strecke weiterhin in ihrem Mittelpunkt (dem Durchstoßpunkt) schneidet, liegen die beiden Punkte also symmetrisch zueinander bezüglich der Ebene.

b) **▶ Berechnung des Bindungswinkels ff** (3BE)

Wie aus der gegebenen Zeichnung ersichtlich ist, wird der Winkel α von den Vektoren $\overrightarrow{CH_2}$ und $\overrightarrow{CH_3}$ eingeschlossen. Für diese Vektoren gilt zunächst:

$$\overrightarrow{CH_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CH_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für den eingeschlossenen Bindungwinkel α ergibt sich damit:

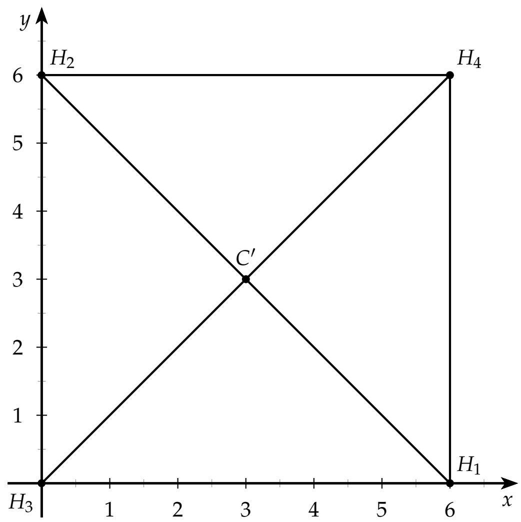
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CH_2} \circ \overrightarrow{CH_3}}{|\overrightarrow{CH_2}| \cdot |\overrightarrow{CH_3}|} = \frac{\begin{pmatrix}-3\\3\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{9+9+9} \cdot \sqrt{9+9+9}} = \frac{9+(-9)+(-9)}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{27}} = \frac{-9}{27} = -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \quad \alpha \approx 109{,}5°$

Der Bindungswinkel hat ein Gradmaß von etwa 109,5°.

c) ► **Nachweis, dass die Strukturformel gerechtfertigt ist** (3BE)

Die Bildpunkte bei der Parallelprojektion haben immer dieselben x- bzw. y-Koordinaten wie ihre ursprünglichen Punkte, allein die z-Koordinate ist immer Null. Für die beiden fehlenden Bildpunkte H_4' und C' ergibt sich damit $H_4'(6 \mid 6 \mid 0)$ sowie $C'(3 \mid 3 \mid 0)$.



Allein die Koordinaten dieser Bildpunkte verraten schon, dass die Bildpunkte H_i' die Eckpunkte eines Quadrats mit dem Mittelpunkt C' sind. Es sollte jedoch noch eine Skizze wie nebenstehend angefertigt werden.

Da die Punkte ein Quadrat mit dem Mittelpunkt C' bilden, ist die Strukturformel des Methanmoleküls damit gerechtfertigt.