a) ▶ **Grenzwerte von $f(x)$ angeben** (2P)

Überlege dir zunächst, was es heißt, das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ zu untersuchen:

- Wenn du das Verhalten für $x \to \infty$ betrachtest, so fragst du: Wie entwickeln sich die Funktionswerte $f(x)$, wenn ich für x sehr große positive Zahlen einsetze?
- Wenn du das Verhalten für $x \to -\infty$ betrachtest, so ist die Frage: Wie entwickeln sich die Funktionswerte $f(x)$, wenn ich für x betragsmäßig sehr große negative Zahlen einsetze?

Wichtig ist dabei auch das Verhalten der e-Funktion für $x \to \pm\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \infty; \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$

Wenn der lineare Term $\left(\frac{1}{2}x\right)$ und der exponentielle Term (e^{x+1}) unterschiedliche Grenzwerte haben, so setzt sich der exponentielle Term durch.

Betrachte nun das Verhalten von $f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{-\frac{1}{2}x}_{\to-\infty}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{x+1}}_{\to+\infty}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{-\frac{1}{2}x}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{x+1}}_{\to 0}\right) = 0$$

b) ▶ **Art und Lage des Extrempunkts von G_f ermitteln** (15P)

Du sollst die lokalen Extrempunkte von G_f bestimmen. Dazu kannst du so vorgehen:

- Bestimme im ersten Schritt die ersten beiden Ableitungen f' und f'' nach der Produktregel.
- Notwendiges Kriterium: Setze $f'(x) = 0$ und löse die Gleichung auf. So erhältst du die potentiellen Extremstellen.
- Hinreichendes Kriterium: Setze die potentiellen Extremstellen in die zweite Ableitung f'' ein. Wenn sich ein positiver Wert ergibt, so liegt ein Minimum vor; wenn sich ein negativer Wert ergibt, dann liegt ein Maximum vor.
- Setze die Extremstellen zuletzt in die Funktionsgleichung von f ein und berechne so die zugehörigen y-Koordinaten.

1. Schritt: Ableitungen bilden

Mit der **Produktregel** folgt:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{x+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x\cdot\mathrm{e}^{x+1}\cdot 1 \qquad \left|\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x+1}\text{ ausklammern}\right.$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x+1}\cdot(1+x)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x+1}\cdot 1\cdot(1+x) + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\mathrm{e}^{x+1}\cdot 1 \qquad \left|\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x+1}\text{ ausklammern}\right.$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x+1}\cdot((1+x)+1)$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x+1}\cdot(2+x)$$

2. Schritt: Notwendiges Kriterium

Setze $f'(x) = 0$:

$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{x+1} \cdot (1+x) = 0.$

Ein Produkt wird Null, wenn einer seiner Faktoren Null wird. Da der Ausdruck $-\frac{1}{2}e^{x+1}$ **niemals** Null werden kann, genügt es, wenn du den Term in der Klammer betrachtest:

$$\begin{aligned} 1+x &= 0 \qquad | -1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

f besitzt eine potentielle Extremstelle $x = -1$.

3. Schritt: Hinreichendes Kriterium

Berechne $f''(-1)$:

$$\begin{aligned} f''(-1) &= -\frac{1}{2}e^{-1+1} \cdot (2+(-1)) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot e^0 \cdot 1 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Es ergibt sich ein **negativer** Wert. Also liegt an der Stelle $x = -1$ ein **Maximum** vor.

4. Schritt: Zugehörige y-Koordinate berechnen

Berechne $f(-1)$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot e^{-1+1} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Der Graph G_f besitzt den lokalen Hochpunkt $H\left(-1 \mid \frac{1}{2}\right)$.

▶ Parallelität der Wendetangente zur Geraden h nachweisen

Du sollst zeigen, dass die Tangente, welche im Wendepunkt W an den Graphen G_f anliegt, parallel zur Geraden h mit der Gleichung $y = \frac{1}{2e}x$ verläuft. Aus der Aufgabenstellung weißt du, dass G_f genau einen Wendepunkt besitzt, aber du kennst dessen Koordinaten noch nicht. Du kannst deshalb so vorgehen:

- Bestimme im ersten Schritt die Koordinaten des Wendepunkts. Da du weißt, dass G_f genau einen Wendepunkt hat, musst du das **hinreichende Kriterium** nicht untersuchen.
- Zwei Geraden sind parallel, wenn sie die gleiche Steigung haben. Die Steigung der Geraden h ist bekannt, du kannst sie aus der Funktionsgleichung ablesen. Berechne nun also die Steigung der Tangente $t$an den Graphen G_f im Wendepunkt W. Dabei gilt: Die Steigung der Tangente ist dieselbe wie die Steigung von f im Berührpunkt.

1. Schritt: Wendepunkt W bestimmen

Für eine Wendestelle x_W gilt:

- notwendiges Kriterium: $f''(x_W) = 0$,
- hinreichendes Kriterium: $f'''(x_W) \neq 0$.

Aufgrund der Information, dass G_f genau einen Wendepunkt besitzt, musst du das hinreichende Kriterium nicht untersuchen. Aus dem ersten Abschnitt dieses Aufgabenteils kennst du die zweite Ableitung f'' mit $f''(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x+1} \cdot (2+x)$. Setze $f''(x) = 0$ und erhalte so die Wendestelle von f. Bestimme danach über $f(x)$ die zugehörige y-Koordinate.

Setze $f''(x) = 0$:

$f''(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x+1} \cdot (2+x) = 0.$

Ein Produkt wird Null, wenn einer seiner Faktoren Null wird. Da der Ausdruck $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x+1}$ **niemals** Null werden kann, genügt es, wenn du den Term in der Klammer betrachtest:

$$\begin{aligned} 2+x &= 0 \qquad\qquad | -2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

f besitzt die Wendestelle $x = -2$.

Setze $x = -2$ ein in $f(x)$ und berechne so die zugehörige y-Koordinate:

$$\begin{aligned} f(-2) &= -\frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot \mathrm{e}^{-2+1} \\ &= \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

Der Graph G_f besitzt den Wendepunkt $W\left(-2 \mid \mathrm{e}^{-1}\right)$.

2. Schritt: Steigung der Wendetangente berechnen

Die Wendetangente ist die Tangente, die im Punkt $W\left(-2 \mid \mathrm{e}^{-1}\right)$ an den Graphen von f anliegt. Ihre Steigung ist dabei dieselbe wie die Steigung der Funktion f in diesem Punkt. Die Steigung einer Funktion wird dir immer gegeben durch deren erste Ableitung f'. Für die Steigung m_t der Wendetangente gilt also:

$m_t = f'(-2).$

Die erste Ableitung kennst du noch aus dem ersten Abschnitt dieses Aufgabenteils. Setze $x = -2$ ein und rechne aus:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2+1} \cdot (1+(-2)) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-1} \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-1} \qquad\qquad | \ \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} \\ &= \frac{1}{2\mathrm{e}} \end{aligned}$$

Du weißt nun, dass die Wendetangente t die Steigung $\frac{1}{2\mathrm{e}}$ hat. Du sollst zeigen, dass die Tangente t und die Gerade h parallel verlaufen. Dies ist der Fall, wenn die beiden Geraden die gleiche Steigung haben. Betrachte also die Funktionsgleichung von h. Sie ist eine Geradengleichung und hat die Form $y = mx + b$. Die Steigung der Geraden ist der Wert m:

$h: y = \frac{1}{2\mathrm{e}}x$

Du findest $m = \frac{1}{2\mathrm{e}}$. Also haben h und die Tangente t die gleiche Steigung und verlaufen somit parallel.

c) ▸ **Einzigen gemeinsamen Punkt nachweisen** (7P)

Lies die Aufgabenstellung gut durch. Du sollst nicht nur zeigen, dass der Koordinatenursprung $O\,(0 \mid 0)$ ein gemeinsamer Punkt der beiden Graphen ist, sondern dass er der **einzige** gemeinsame Punkt ist. Du kannst deshalb so vorgehen:

- Setze die Funktionsterme von f und g gleich: $f(x) = g(x)$.
- So berechnest du die Schnittstellen der beiden Funktionen. Zeige, dass $x = 0$ sich als **einzige** Lösung ergibt und dass die zugehörige y-Koordinate auch Null ist. Dann ist der Ursprung als einziger gemeinsamer Punkt nachgewiesen.

Setze $f(x) = g(x)$ und löse nach x auf:

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
-\frac{1}{2}\cdot x\cdot \mathrm{e}^{x+1} &= -\frac{1}{2}\cdot x\cdot\left(\mathrm{e}^{x+1}-x\right) && \mid \cdot(-2) \\
x\cdot \mathrm{e}^{x+1} &= x\cdot\left(\mathrm{e}^{x+1}-x\right) && \mid -x\cdot\left(\mathrm{e}^{x+1}-x\right) \\
x\cdot \mathrm{e}^{x+1} - x\cdot\left(\mathrm{e}^{x+1}-x\right) &= 0 && \mid x \text{ ausklammern} \\
x\cdot\left(\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}^{x+1}+x\right) &= 0 \\
x\cdot x &= 0 \\
x^2 &= 0 && \mid \sqrt{} \\
x_{1,2} &= 0
\end{aligned}$$

$x = 0$ ist die einzige Lösung dieser Gleichung. Damit folgt: Die einzige Schnittstelle der Funktionen f und g ist bei $x = 0$. Bestimme die zugehörige y-Koordinate:

$f(0) = -\frac{1}{2}\cdot 0\cdot \mathrm{e}^{0+1} = 0$

Nun ist der Ursprung $(0 \mid 0)$ als einziger gemeinsamer Punkt der Graphen G_f und G_g nachgewiesen.

▸ **Gemeinsame Tangente nachweisen**

Bekannt ist, dass die beiden Graphen sich im Ursprung $O\,(0 \mid 0)$ schneiden. Die Tangenten, die in diesem Punkt an die beiden Graphen anliegen, verlaufen also ebenfalls durch den Koordinatenursprung und schneiden hier die y-Achse. Die beiden Tangenten besitzen also auf jeden Fall mit $c = 0$ den gleichen y-Achsenabschnitt.

Es bleibt die Frage, ob die beiden Tangenten auch die gleiche **Steigungen** haben. Die Steigung der Tangente ist dieselbe wie die Steigung der Funktion im Berührpunkt. Die Steigung einer Funktion wird dir immer durch die erste Ableitung gegeben. Du kannst so vorgehen:

- Bestimme zunächst den Term $g'(x)$ nach der Produktregel.
- Berechne $f'(0)$ und $g'(0)$ und zeige, dass sich der gleiche Wert ergibt. Dann ist nachgewiesen, dass die beiden Graphen in diesem Punkt auch die gleichen Tangenten haben.

1. Schritt: Ableitung von g bestimmen

$$g'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(e^{x+1} - x\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x \cdot \left(e^{x+1} - 1\right)$$

2. Schritt: Steigungen bei $x = 0$ berechnen

Berechne jetzt $f'(0)$ und $g'(0)$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= -\frac{1}{2}e^{0+1} \cdot (1+0) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot e \cdot 1 \\ &= -\frac{1}{2}e \\ g'(0) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(e^{0+1} - 0\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 \cdot \left(e^{0+1} - 1\right) \\ &= -\frac{1}{2}\,(e) + 0 \\ &= -\frac{1}{2}e \end{aligned}$$

Die Steigungen der Graphen G_f und G_g im Ursprung sind identisch. Damit besitzen die beiden Graphen im Ursprung die gleiche Tangente.

d) ▶ **Flächeninhalt eines Drachens berechnen** (7P)

Die Symmetrieachse des Drachen ist die (senkrechte) Gerade $x = -3$. In der Abbildung ist also genau die **Hälfte** der Drachenfläche abgebildet.

Diese Fläche wird begrenzt durch die Graphen G_f, G_g und die Gerade $x = -3$. Dabei verläuft der Graph G_g **oberhalb** des Graphen G_f. Gesucht ist der Flächeninhalt des Drachens. Du kannst also so vorgehen:

- Berechne mit dem **Hauptsatz der Integralrechnung** den Flächeninhalt der abgebildeten Fläche.
- Verdopple diesen Flächeninhalt, weil nur die Hälfte des Drachens abgebildet ist.
- Beachte zuletzt den Maßstab: 3 LE in der Abbildung stehen für 1 m in der Realität.

Für den Inhalt A der eingeschlossenen Fläche gilt mit dem Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{0} \left(g(x) - f(x)\right) dx \\ &= \int_{-3}^{0} \left(-\frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(e^{x+1} - x\right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{x+1}\right)\right) dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-3}^{0} \left(-\frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(e^{x+1} - x \right) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{x+1} \right) dx \qquad | \text{ ausmultiplizieren}$$

$$= \int_{-3}^{0} \left(-\frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{x+1} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{x+1} \right) dx$$

$$= \int_{-3}^{0} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 \right]_{-3}^{0}$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^3 \right]_{-3}^{0}$$

$$= \left(\frac{1}{6} \cdot 0^3 \right) - \left(\frac{1}{6} \cdot (-3)^3 \right)$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{6} \cdot (-3)^3 \right)$$

$$= 4{,}5$$

Die Fläche des Drachens ist doppelt so groß und hat damit den Inhalt 9 FE. Nun wissen wir, dass 1 m genau **drei** LE der Skizze entspricht. Für $1\,\text{m}^2$ gilt dann:

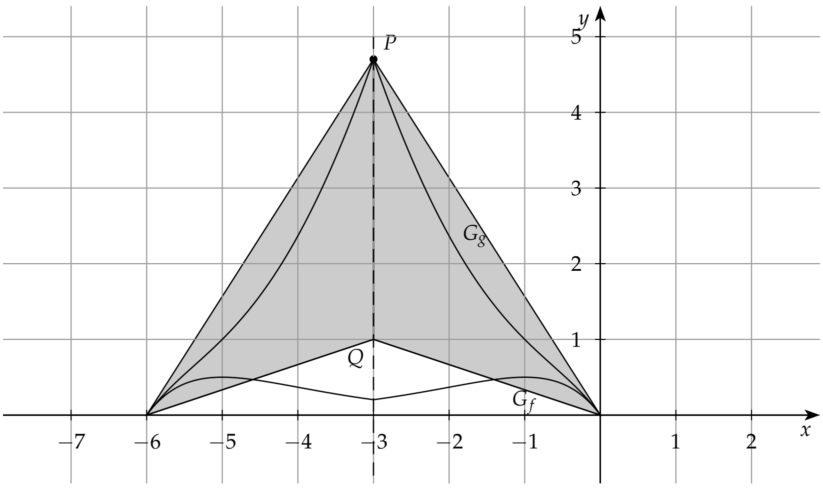
$1\,\text{m}^2 = 1 \cdot (3\,\text{LE})^2 = 9\,\text{FE}$

Deshalb hat der Drachen einen Flächeninhalt von $1\,\text{m}^2$.

e) **▸ Mögliche Drachenform zeichnen** (9P)

Die **Hälfte** der neuen Drachenform soll ein Dreieck sein, welches anschließend an der Gerade $x = -3$ gespiegelt wird. Einer der Eckpunkte des Dreiecks ist der Koordinatenursprung mit $O\,(0 \mid 0)$; ein weiterer Eckpunkt ist der Schnittpunkt des Graphen G_g mit der Geraden $x = -3$. Dieser Schnittpunkt ist in der Anlage bereits eingezeichnet, er ist die Spitze des alten (und auch des neuen) Drachens.

Der dritte Schnittpunkt Q soll ebenfalls auf der Geraden $x = -3$ liegen, also senkrecht unterhalb der Spitze. Seine y-Koordinate soll dabei zwischen 0 und 2 liegen. Wir wählen für dieses Beispiel $y_Q = 1$. Den neuen Drachen haben wir in der Skizze grau gefärbt.



▶ Koordinaten von Q berechnen

Die Koordinaten von Q sollen so bestimmt werden, dass die Drachenfläche einen Inhalt von $1\,\text{m}^2$ besitzt. Von oben weißt du: $1\,\text{m}^2$ in der Realität sind 9 FE in der Abbildung. Insgesamt soll die Drachenfläche also 9 FE groß sein.

Du kannst aufgrund der Symmetrie zur Geraden $x = -3$ wieder nur eine Hälfte des Drachens betrachten; wir wählen die rechte Hälfte. Diese Hälfte ist ein stumpfwinkliges **Dreieck**:

- Die **Höhe** liegt außerhalb des Dreiecks; du kannst sie auf der x-Achse einzeichnen. Unabhängig von der genauen Lage von Q ist die Höhe $h = 3\,\text{LE}$.
- Die **Grundseite** des Dreiecks entspricht der Seite $g = \overline{PQ}$.
- Für den Flächeninhalt A des Dreiecks gilt dann: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

Du benötigst also die Koordinaten des Punkts P. Er ist der Schnittpunkt des Graphen G_g mit der Geraden $x = -3$.

Gehe z.B. so vor:

- Berechne zunächst die y-Koordinate von P.
- Bestimme dann einen Term für die Länge $\overline{PQ}$.
- Setze diesen Term sowie $h = 3$ ein in die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A. Der Flächeninhalt des Dreiecks soll 4,5 FE betragen. Setze also $A = 4{,}5$ und löse nach y_Q auf.

1. Schritt: Koordinaten von P berechnen

Die x-Koordinate von P ist $x = -3$. Außerdem liegt P auf dem Graphen G_g. Seine y-Koordinate ist also der Funktionswert $g(-3)$:

$$\begin{aligned} g(-3) &= -\frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot \left(\mathrm{e}^{-3+1} - (-3)\right) \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{-2} + 3\right) \approx 4{,}7 \end{aligned}$$

2. Schritt: Länge $\overline{PQ}$ berechnen und in Formel einsetzen

Die Punkte P und Q liegen senkrecht untereinander. Ihr Abstand ist genau die Differenz ihrer y-Koordinaten. Die y-Koordinate von P ist $4{,}7$, die von Q ist y_Q, also gilt:
$\overline{PQ} = 4{,}7 - y_Q$.

Setze $\overline{PQ} = g = 4{,}7 - y_Q$ und $h = 3$ ein in die Gleichung zur Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot (4{,}7 - y_Q) \cdot 3 && \text{Es soll gelten: } A = 4{,}5\,\text{FE} \\ 4{,}5 &= \frac{1}{2}\left(4{,}7 - y_Q\right) \cdot 3 && \mid :3 \\ 1{,}5 &= \frac{1}{2}\left(4{,}7 - y_Q\right) && \mid \cdot 2 \\ 3 &= 4{,}7 - y_Q && \mid -4{,}7 \\ -1{,}7 &= -y_Q && \mid \cdot(-1) \\ y_Q &= 1{,}7 \end{aligned}$$

Q hat die Koordinaten $(-3 \mid 1{,}7)$.