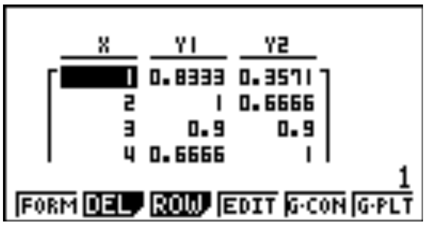
a) ▶ **Skizze der Graphen von f_2 und f_4** (20P)

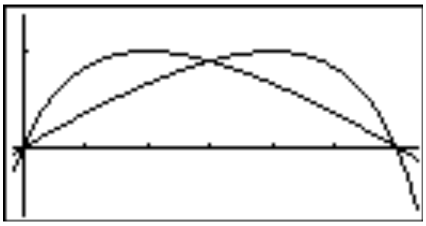
In diesem Aufgabenteil sollst du eine Skizze zu den Graphen von f_2 und f_4 anfertigen. Setze hierzu $k = 2$ und $k = 4$ in den Funktionsterm der Funktionenschar f_k ein.

$$f_2(x) = \frac{x\cdot(6-x)}{(6-2\cdot 2)\cdot x+2^2} = \frac{x\cdot(6-x)}{2\cdot x+4}$$

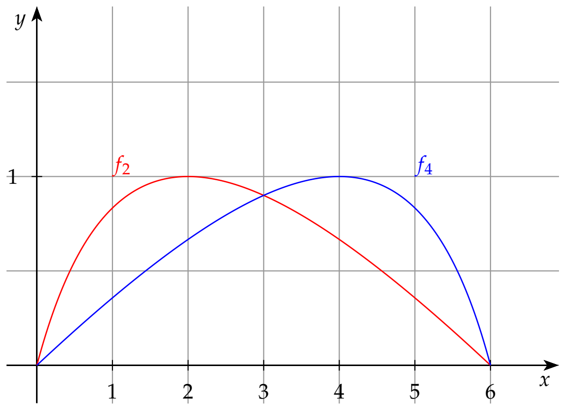
$$f_4(x) = \frac{x\cdot(6-x)}{(6-2\cdot 4)\cdot x+4^2} = \frac{x\cdot(6-x)}{(-2)\cdot x+16}$$

Die Graphen von f_2 und f_4 kannst du dir nun von deinem GTR anzeigen lassen. Trage dafür die Funktionsterme von f_2 und f_4 in das `Table` - Menü des GTR ein. Mit der `F6` - Taste kannst du eine Wertetabelle ansehen. Über das `Graph` - Menü kannst du dir den Graphen mit der `F6` - Taste zeichnen lassen. Lasse dir die Graphen von f_2 und f_4 im gegebenen Definitionsintervall $0 \leq x \leq 6$ anzeigen. Du kannst also Xmin = 0 und Xmax = 6 wählen.





Überträgst du die Graphen von f_2 und f_4, anhand der obigen Zeichnung und Wertetabelle, in ein Koordinatensystem, so sollte dieses so aussehen:

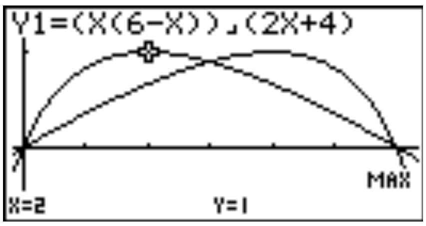


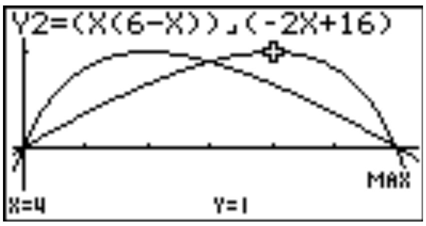
▶ **Bestimmen der Hochpunkte H_k der Graphen von f_k**

Nun sollst du die Hochpunkte H_k der Graphen der Funktionenschar f_k bestimmen. Mit Hilfe des GTR kannst du zunächst einmal die Hochpunkte H_2 und H_4 der Graphen von f_2 und f_4 bestimmen. Verwende dazu im Graphs-Modus oder Menü den Befehl:

`SHIFT → F5 → F2`

Nun musst du den Graphen auswählen, dessen Hochpunkt bestimmt werden soll.



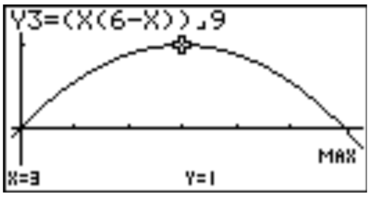


So erhältst du den Hochpunkt $H_2(2\,|\,1)$ des Graphen von f_2 und $H_4(4\,|\,1)$ des Graphen von f_4. Da das Maximum von f_2 bei $x = 2$ liegt und das Maximum von f_4 bei $x = 4$, kannst du vermuten, dass die Maxima von f_k bei $x = k$ mit $0 \leq k \leq 6$ liegen. Außerdem haben beide Hochpunkte H_2 und H_4 eine y-Koordinate von 1, welche also unabhängig vom Parameter k zu sein scheint.
Dies würde bedeuten, dass alle Hochpunkte H_k der Graphen von f_k auf einer, zur x-Achsen parallelen, Geraden g liegen, mit $g(x) = 1$. Das musst du nun noch nachweisen um sicher sagen zu können, dass alle Hochpunkte H_k der Graphen von f_k die Koordinaten $H_k(k\,|\,1)$ haben.
Da zwei Punkte sich immer zu einer Geraden verbinden lassen, benötigst du noch einen dritten Hochpunkt der Graphen von f_k um diese Linearität nachzuweisen. Liegt dieser Hochpunkt dann ebenfalls auf der Geraden g, hast du deine Annahme bewiesen. Setze also beispielsweise noch $k = 3$ in die Funktionsgleichung von f_k ein und gib diese dann wieder in das `Y=` - Menü des GTR ein. Bestimme dann mit dem gleichen Befehl wie oben den Hochpunkt H_3.

Durch das Einsetzen von $k = 3$ in den Funktionsterm von f_k erhältst du:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{x \cdot (6-x)}{(6-2\cdot 3)\cdot x + 3^2} \\ &= \frac{x\cdot(6-x)}{9} \end{aligned}$$

Mit dem GTR erhältst du die Koordinaten des Hochpunkts H_3 des Graphen von f_3.
Die Koordinaten des Hochpunktes H_3 lauten also $H_3(3\,|\,1)$. H_3 liegt also auch auf der Geraden g. Damit haben die Hochpunkte H_k der Graphen von f_k die Koordinaten $H_k(k\,|\,1)$.



alternativ

Analog kannst hier auch die mögliche Extremstelle $x = k$ in die Funktionsgleichung von f_k einsetzen.

$$\begin{aligned} f_k(k) &= \frac{k\cdot(6-k)}{(6-2k)\cdot k + k^2} \\ &= \frac{6k-k^2}{6k-2k^2+k^2} \\ &= \frac{6k-k^2}{6k-k^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

So erhältst du nämlich den von k unabhängigen Funktionswert 1. Damit haben also die Hochpunkte H_k der Graphen von f_k die Koordinaten $H_k(k\,|\,1)$ und liegen auf der Geraden g.

► Beweisen der Aussage und Interpretieren ihrer Bedeutung für die Geometrie

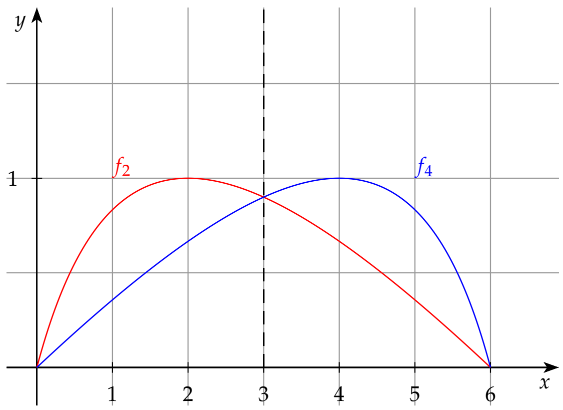
In diesem Aufgabenteil sollst du beweisen, dass die Aussage:

$f_2(3+z) = f_4(3-z)$

für alle z mit $-3 \leq z \leq 3$ gilt und die Bedeutung dieser Aussage im geometrischen Zusammenhang interpretieren.
Um diese Aussage zu beweisen setzt du $x = 3+z$ in den Funktionsterm von f_2 und $x = 3-z$ in den Funktionsterm von f_4 ein. Ist das Ergebnis dann bei beiden gleich ist die Aussage bewiesen.

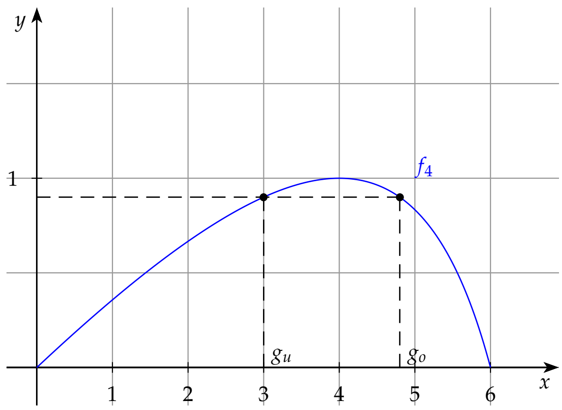
$$\begin{aligned}
f_2(3+z) &= \frac{(3+z)\cdot(6-(3+z))}{2\cdot(3+z)+4} \\
&= \frac{(3+z)\cdot(3-z))}{6+2z+4} \\
&= \frac{9-z^2}{10+2z} \\
f_4(3-z) &= \frac{(3-z)\cdot(6-(3-z))}{(-2)\cdot(3-z)+16} \\
&= \frac{(3-z)\cdot(3+z)}{-6+2z+16} \\
&= \frac{9-z^2}{10+2z} \\
&= f_2(3+z)
\end{aligned}$$

Für zwei unterschiedliche Stellen mit gleichem Abstand zur Stelle $x = 3$, erhält man durch Einsetzen der einen in den Funktionsterm von f_2 und der anderen in den Funktionsterm von f_4 das gleich Ergebnis. Damit ist dann auch die y-Koordinate der beiden zugehörigen Punkte gleich. Geometrisch betrachtet kannst du der Aussage also entnehmen, dass man den Graphen von f_4 erhält, wenn man den Graphen von f_2 an einer Senkrechten bei $x = 3$ spiegelt.



b) **▶ Bestimmen der zwei Werte g_u und g_o** (15P)

Hier ist es deine Aufgabe zwei Werte für g_u und g_o so zu bestimmen, dass die Wachstumsgeschwindigkeit für alle Werte zwischen g_u und g_o mindestens 90 % der maximalen Wachstumsgeschwindigkeit beträgt und das Intervall zwischen g_u und g_o außerdem möglichst groß ist.
Der maximale Funktionswert der Funktion f_4 entspricht der y-Koordinate des im vorherigen Aufgabenteil berechneten Hochpunkts H_4, also 1. Diese stellt damit auch die maximale Wachstumsgeschwindigkeit dar. Du suchst in der Aufgabe also die beiden Stelle g_u und g_o, für die f_4 den Funktionswert 0,9 annimmt, denn das sind 90 % der maximale Wachstumsgeschwindigkeit. So sind nämlich alle Funktionswerte dazwischen größer als 0,9 und das Intervall ist für die gewünschten Bedingung maximal.



Setze nun also den Funktionsterm von f_4 mit 0,9 gleich:

$$\begin{aligned}
0,9 &= f_4(x) \\
0,9 &= \frac{x\cdot(6-x)}{-2x+16} && \mid -0,9 \\
0 &= \frac{6x-x^2}{-2x+16} - 0,9 && \mid \cdot(-2x+16) \\
0 &= 6x - x^2 - 0,9\cdot(-2x+16) \\
0 &= 6x - x^2 + 1,8x - 14,4 \\
0 &= -x^2 + 7,8x - 14,4
\end{aligned}$$

Mit der Mitternachtsformel (*abc*-Formel) oder alternativ mit der *pq*-Formel erhältst du nun zwei Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-7,8 \pm \sqrt{(-7,8)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-14,4)}}{2 \cdot (-1)} \\
&= \frac{-7,8 \pm \sqrt{60,84 - 57,6}}{-2} \\
&= \frac{-7,8 \pm \sqrt{3,24}}{-2} \\
&= \frac{-7,8 \pm 1,8}{-2} \\
x_1 &= \frac{-7,8 + 1,8}{-2} \\
&= \frac{-6}{-2} \\
&= 3 \\
x_2 &= \frac{-7,8 - 1,8}{-2} \\
&= \frac{-9,6}{-2} \\
&= 4,8
\end{aligned}$$

Alternative (*pq*-Formel):

$$\begin{aligned}
0 &= -x^2 + 7,8x - 14,4 \qquad | \cdot(-1) \\
0 &= x^2 - 7,8x + 14,4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= 3,9 \pm \sqrt{(3,9)^2 - 14,4} \\
x_{1,2} &= 3,9 \pm \sqrt{0,81} \\
x_{1,2} &= 3,9 \pm 0,9 \\
x_1 &= 3,9 - 0,9 \\
&= 3 \\
x_2 &= 3,9 + 0,9 \\
&= 4,8
\end{aligned}$$

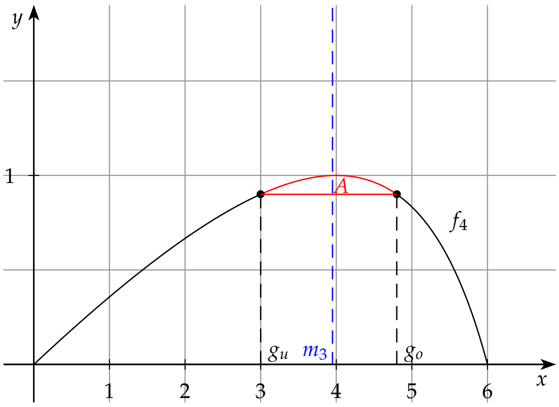
Damit hast du die Werte $g_u = x_1 = 3$ und $g_o = x_2 = 4,8$ bestimmt.

▶ Bestimmen der Werte für m_1, m_2 und m_3

In diesem Aufgabenteil sollst du die drei Werte m_1, m_2 und m_3 bestimmen. m_1 entspricht dem arithmetischen Mittel von g_u und g_o. Um m_1 zu berechnen musst du also g_u und g_o addieren und dann durch zwei teilen.

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{g_u + g_o}{2} \\
&= \frac{(3 + 4,8)}{2} \\
&= \frac{7,8}{2} \\
&= 3,9
\end{aligned}$$

m_2 soll an der Stelle des Maximums liegen, diese hast du bereits im Aufgabenteil a) bestimmt. Es gilt daher $m_2 = 4$. Um nun noch m_3 zu bestimmen musst du den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen von f_4 und der waagerechten Gerade $y = 0,9$ bestimmen. Dieser soll dann durch eine Senkrechte bei $x = m_3$ halbiert werden.



Den Flächeninhalt A kannst du mit dem Integral über die Funktion f_4 in den Grenzen zwischen g_u und g_o, von dem du dann das Integral von $y = 0,9$ mit den selben Integralgrenzen subtrahierst, bestimmen. Es gilt also:

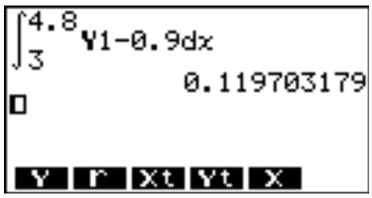
$$A = \int_{g_u}^{g_o} f_4(x)\ \mathrm{d}x - \int_{g_u}^{g_o} 0,9\ \mathrm{d}x = \int_{g_u}^{g_o} (f_4(x) - 0,9)\ \mathrm{d}x$$

Den Flächeninhalt der, durch die Teilung bei m_3 entstehenden, linken Teilfläche kannst du bestimmen indem du die rechte Integralgrenze g_o durch m_3 ersetzt. Außerdem soll die Senkrechte bei m_3 die anfängliche Fläche genau halbieren, der Flächeninhalt der Teilfläche ist also genau halb so groß wie A. Es gilt also:

$$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\int_{g_u}^{g_o} (f_4(x) - 0,9)\ \mathrm{d}x = \int_{g_u}^{m_3} (f_4(x) - 0,9)\ \mathrm{d}x$$

Berechne nun mit Hilfe des GTRs den Flächeninhalt A über das Integral von $f_4(x) - 0,9$ von $g_u = 3$ bis $g_o = 4,8$. Gib den Funktionsterm im `Graph` - Menü deines GTR ein. Anschließend kannst du das Integral berechnen.

Verwende dazu folgenden Befehl: `F4` $\rightarrow$ `F6` $\rightarrow$ `F1`



Dort gibst du dann den Funktionsterm und die Integralgrenzen ein. Damit erhältst du also:

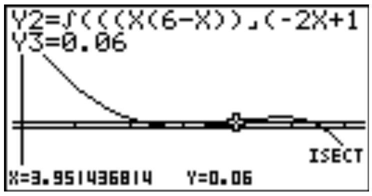
$$\int_{g_u}^{g_o} (f_4(x) - 0,9)\ \mathrm{d}x \approx 0,12$$

Mit $\frac{1}{2} \cdot 0,12 = 0,06$ folgt dann:

$$\int_{g_u}^{m_3} (f_4(x) - 0,9)\ \mathrm{d}x \approx 0,06$$

Um m_3 nun mit deinem GTR zu berechnen, tippst du $f_4(x) - 0,9$ in das `Graph`-Menü ein. Der GTR zeigt dir jetzt den Graph einer Funktion für den Wert des Integrals in Abhängigkeit der Integralgrenze x, also genau dem gesuchten m_3, an.

Bestimme nun den x-Wert, für den diese Funktion den Wert 0,06 annimmt, grafisch.
Definiere dafür $\boxed{Y_3}$ als $Y_3 = 0,06$ und bestimme mit dem GTR den Schnittpunkt von $f_4(x) - 0,9$ und Y_3. Das machst du mit dem Befehl $\boxed{\texttt{SHIFT} \to \texttt{F5} \to \texttt{F5}}$.



Damit erhältst du $m_3 \approx 3,95$. Die drei gesuchten Werte hast du nun berechnet und es gilt $m_1 = 3,9$, $m_2 = 4$ und $m_3 \approx 3,95$.

▶ Vergleichen der Werte für m_1, m_2 und m_3 unter Bezug auf den Sachzusammenhang

In diesem Aufgabenteil sollst du die zuvor ermittelten Werte für m_1, m_2 und m_3 vergleichen und dabei Bezug auf die der Verfahren aus der Aufgabenstellung nehmen. Dabei wird in jedem Verfahren jeweils einer der drei Werte als Richtwert für die Salzkonzentration gewählt. Die Salzkonzentration schwankt dann aus mehreren, unbekannten Gründen um diesen Richtwert und damit auch ihre, durch die Funktion f_4 definierte, Wachstumsgeschwindigkeit. Du sollst nun also begründen welcher der drei Werte besser als Richtwert gedacht ist, wenn es darum geht, dass die Wachstumsgeschwindigkeit trotz der Schwankungen der Salzkonzentration möglichst groß sein soll.
Dafür musst du unterscheiden, um welche Schwankungen es sich handelt. Sind es kleine Schwankungen so wählt man am besten m_2 als Richtwert, denn m_2 ist der maximale Wert der Wachstumsgeschwindigkeit und in seiner Umgebung sind die Funktionswerte von f_4 nur geringfügig kleiner.
Handelt es sich dagegen um größere Schwankungen, so wählt man am besten m_1 als Richtwert. Denn m_1 ist die Mitte des Intervalls $[g_u; g_o]$ und so bleiben die Funktionswerte von f_4 und damit die Wachstumsgeschwindigkeit, für größere Schwankungen in beiden Richtungen gleich lang über 90% der maximalen Wachstumsgeschwindigkeit.

c) **▶ Beweis, dass t_2 die Taylorfunktion zweiten Grades zu f_4 an der Stelle $x = 4$ ist** (15P)

Hier ist es nun deine Aufgabe zu beweisen, dass die Funktion t_2 die Taylorfunktion zweiten Grades von f_4 an der Stelle $x = 4$ ist. Damit dies der Fall ist müssen die Funktionswerte von t_2 und f_4 und jeweils der ersten beiden Ableitungen dieser, für $x = 4$ übereinstimmen. Die erste und zweite Ableitungen von f_4 sind bereits in der Aufgabenstellung gegeben. Du musst nun also noch die erste und die zweite Ableitungsfunktion von t_2 mit Hilfe der Potenz und der Kettenregel bestimmen. Setze danach $x = 4$ in die Funktionsterme von t_2, f_4, t_2', f_4', t_2'' und f_4'' ein und überprüfe ob folgende Bedingungen gelten:

- $t_2(4) = f_4(4)$
- $t_2'(4) = f_4'(4)$
- $t_2''(4) = f_4''(4)$

Du gehst also so vor:

1. Schritt: Bestimmen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion von t_2
2. Schritt: Berechnen der benötigten Funktionswerte und Überprüfen der Bedingungen

1. Schritt: Bestimmen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion von t_2

Mit der Potenz- und der Kettenregel bestimmst du die Funktionsterme von t_2' und t_2''.

$$\begin{aligned} t_2'(x) &= -\frac{2\cdot(x-4)^{2-1}\cdot 1}{8} \\ &= -\frac{(x-4)}{4} \\ t_2''(x) &= -\frac{1\cdot(x-4)^{1-1}\cdot 1}{4} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. Schritt: Berechnen der benötigten Funktionswerte und Überprüfen der Bedingungen

Setze nun $x = 4$ in die Funktionsterme von $t_2, f_4, t_2', f_4', t_2''$ und f_4'' ein und überprüfe so ob die oben genannten Bedingungen gelten.

$$\begin{aligned} t_2(4) &= 1 - \frac{(4-4)^2}{8} \\ &= 1 \\ f_4(4) &= \frac{4\cdot(6-4)}{(-2)\cdot 4+16} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad t_2(4) = f_4(4)$$

$$\begin{aligned} t_2'(4) &= -\frac{(4-4)}{4} \\ &= 0 \\ f_4'(4) &= \frac{4^2-16\cdot 4+48}{2\cdot(4-8)^2} \\ &= \frac{16-64+48}{2\cdot(-4)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad t_2'(4) = f_4'(4)$$

$$\begin{aligned} t_2''(4) &= -\frac{1}{4} \\ f_4''(4) &= \frac{16}{(4-8)^3} \\ &= \frac{16}{-64} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad t_2''(4) = f_4''(4)$$

Damit hast du bewiesen, dass die Funktion t_2 die Taylorfunktion zweiten Grades von f_4 an der Stelle $x = 4$ ist.

▶ Ermitteln der Taylorfunktion t_3 dritten Grades zu f_4 an der Stelle $x = 4$

In diesem Aufgabenteil sollst du nun die Taylorfunktion t_3 dritten Grades zu f_4 an der Stelle $x = 4$ mit Hilfe des Funktionsterms von t_2 bestimmen. Für t_3 gilt:

$$t_3(x) = t_2(x) + \frac{f_4'''(4)}{3!} \cdot (x-4)^3$$

Du musst also den Funktionswert der dritten Ableitung von f_4 für $x = 4$ bestimmen und diesen dann zusammen mit t_2 in die Gleichung einsetzen.

$$\begin{aligned} f_4'''(4) &= -\frac{48}{(4-8)^4} \\ &= -\frac{48}{256} \\ &= -\frac{3}{16} \end{aligned}$$

Setze $f_4'''(4)$ nun zusammen mit t_2 in die obige Gleichung ein.

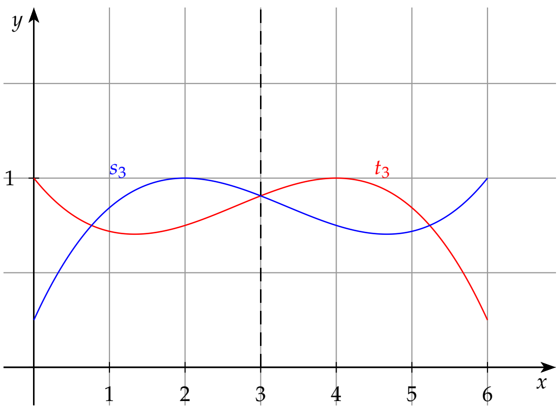
$$\begin{aligned} t_3(x) &= t_2(x) + \frac{f_4'''(4)}{3!} \cdot (x-4)^3 \\ &= 1 - \frac{(x-4)^2}{8} - (\frac{3}{16} : 6) \cdot (x-4)^3 \\ &= 1 - \frac{(x-4)^2}{8} - \frac{3}{16 \cdot 6} \cdot (x-4)^3 \\ &= 1 - \frac{(x-4)^2}{8} - \frac{(x-4)^3}{32} \end{aligned}$$

Die Taylorfunktion t_3 dritten Grades zu f_4 an der Stelle $x = 4$ hat also die Funktionsgleichung $t_3(x) = 1 - \frac{(x-4)^2}{8} - \frac{(x-4)^3}{32}$.

▶ Vergleichen der Graphen von t_3 und s_3

Nun sollst du die Graphen von t_3 und s_3 vergleichen und auftretende Gemeinsamkeiten erklären.

Dazu benötigst du jedoch erst einmal die beiden Graphen. Erstellen daher, wie im ersten Aufgabenteil, mit Hilfe des GTR ein Skizze der Graphen von t_3 und s_3.



Dabei fällt auf, dass sich auch hier wieder der Graph von t_3 durch Spiegelung an einer Senkrechten bei $x = 3$ auf den Graphen von s_3 abbilden lässt (und umgekehrt). Der Unterschied der beiden Graphen liegt also darin, dass sie genau spiegelverkehrt verlaufen. Um zu begründen wieso es diesen Unterschied gibt musst du begründen warum hier erneut eine solche Symmetrie vorliegt.

t_3 ist die Taylorfunktion dritten Grades zu f_4 an der Stelle $x = 4$, s_3 wiederum ist die Taylorfunktion dritten Grades zu f_2 an der Stelle $x = 2$. Da der Graph von f_4 durch Spiegelung an einer Senkrechten bei $x = 3$ aus dem Graphen von f_2 hervorgeht, müssen deren Taylorfunktionen gleichen Grades, an Stellen die den gleichen Abstand zur Stelle $x = 3$ haben (was bei 4 und 2 der Fall ist), ebenfalls diese Symmetrie aufweisen.

d) ▶ **Bestimmen der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_k$** (10P)

In diesem Aufgabenteil sollst du die maximal mögliche Definitionsmenge $\mathbb{D}_k$ der Funktionenschar f_k bestimmen. Die Definitionsmenge ist jene Teilmenge einer Grundmenge, deren Elementen x durch die Funktion f_k eindeutig ein Element y der Wertemenge zugeordnet wird. Damit diese maximal ist wählst du als Grundmenge $\mathbb{R}$, die Menge aller reellen Zahlen, und bestimmst dann die Werte, die nicht für x in den Funktionsterm von f_k eingesetzt werden dürfen. Da f_k eine gebrochenrationale Funktion ist sind das die x-Werte, für die der Nenner gleich Null wird, denn durch Null darf nicht geteilt werden. Diese Stellen müssen dann aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden.
Setze nun also den Nenner des Funktionsterms vom f_k mit Null gleich um so alle x-Werte zu bestimmen die nicht in den Funktionsterm von f_k eingesetzt werden dürfen, also nicht in $\mathbb{D}_k$ enthalten sind.

$$\begin{aligned} 0 &= (6-2k)\cdot x + k^2 && \mid -k^2 \\ -k^2 &= (6-2k)\cdot x && \mid :(6-2k) \\ x &= \frac{-k^2}{6-2k} \end{aligned}$$

Alle x-Werte die diese Bedingung erfüllen, dürfen also nicht in den Funktionsterm von f_k eingesetzt werden. Jedoch musst du hier eine Fallunterscheidung machen. Gilt nämlich $k = 3$ so wird der Nenner dieser Bedingung Null. In diesem Fall hättest du also nicht die Äquivalenzumfromung
$\mid : (6-2k)$ machen können und schon in der ersten Zeile wäre mit $0 = 3^2$ klar geworden, dass der Nenner des Funktionsterms von f_k nicht Null werden kann.
Mit $\mathbb{R}$ als Grundmenge erhältst du dann folgendes für die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_k$:

Für $k = 3$:
$\mathbb{D}_k = \mathbb{R}$

Für $k \neq 3$ folgt:
$\mathbb{D}_k = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-k^2}{6-2k} \right\}$

▶ **Bestimmen der Parameter k für die f_k keine zwei Extremstellen besitzt**

Hier ist es nun deine Aufgabe alle Werte des Parameters k zu bestimmen für die f_k keine zwei Extremstellen hat. Dafür musst du zunächst einmal alle potentiellen Extremstellen von f_k berechnen. Für eine potentielle Extremstelle bei x_E gilt:

Notwendige Bedingung: $f_k'(x_E) = 0$

Setze also die erste Ableitung von f_k mit Null gleich. Dadurch erhältst du zwei von k abhängige potentielle Extremstellen x_{E_1} und x_{E_2}. Setze diese dann mit einander gleich, denn bei Gleichheit hat f_k so nur eine Extremstelle. Durch das Gleichsetzen kannst du dann die Werte des Parameters k bestimmen für die f_k keine zwei Extremstellen besitzt.
Du gehst also so vor:

1. Schritt: Bestimmen der potentiellen Extremstellen von f_k
2. Schritt: Gleichsetzen der potentiellen Extremstellen von f_k

1. Schritt: Bestimmen der potentiellen Extremstellen von f_k

Setze nun also den Funktionsterm von f_k mit Null gleich, dabei genügt es den Zähler zu betrachten, da der Nenner immer ungleich Null sein muss.

$$\begin{aligned}
f_k'(x) &= 0 \\
0 &= 2(x-k)\cdot((k-3)\cdot x - 3k) \\
0 &= (2x-2k)\cdot(kx-3x-3k) \\
0 &= 2kx^2-6x^2-6kx-2k^2x+6kx+6k^2 \\
0 &= 2kx^2-6x^2-2k^2x+6k^2 \\
0 &= x^2(2k-6)-2k^2x+6k^2
\end{aligned}$$

Mit der Mitternachtsformel (*abc*-Formel) oder alternativ mit der *pq*-Formel erhältst du nun zwei Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
x_{E_{1,2}} &= \frac{2k^2 \pm \sqrt{4k^4-4(2k-6)6k^2}}{2(2k-6)} \\
&= \frac{2k^2 \pm \sqrt{4k^4-4(12k^3-36k^2)}}{2(2k-6)} \\
&= \frac{2k^2 \pm \sqrt{4k^4-48k^3+144k^2}}{2(2k-6)} \\
&= \frac{2k^2 \pm \sqrt{(2k^2-12k)^2}}{2(2k-6)} \\
&= \frac{2k^2 \pm (2k^2-12k)}{4k-12)} \\
x_{E_1} &= \frac{2k^2+2k^2-12k}{4k-12)} \\
&= \frac{4k^2-12k}{4k-12)} \\
&= \frac{k(4k-12)}{4k-12)} \\
&= k \\
x_{E_2} &= \frac{2k^2-(2k^2-12k)}{4k-12)} \\
&= \frac{2k^2-2k^2+12k}{4k-12)} \\
&= \frac{12k}{4(k-3)} \\
&= \frac{3k}{k-3}
\end{aligned}$$

Alternative (pq-Formel):

$$\begin{aligned}
0 &= x^2(2k-6) - 2k^2x + 6k^2 && \mid :(2k-6)\\
0 &= x^2 - \frac{2k^2}{2k-6}x + \frac{6k^2}{2k-6}\\
x_{E_{1,2}} &= \frac{2k^2}{2(2k-6)} \pm \sqrt{\left(\frac{2k^2}{2(2k-6)}\right)^2 - \frac{6k^2}{2k-6}}\\
&= \frac{k^2}{2k-6} \pm \sqrt{\frac{k^4}{(2k-6)^2} - \frac{6k^2(2k-6)}{(2k-6)^2}}\\
&= \frac{k^2}{2k-6} \pm \sqrt{\frac{k^4-6k^2(2k-6)}{(2k-6)^2}}\\
&= \frac{k^2}{2k-6} \pm \sqrt{\frac{k^4-12k^3+36k^2}{(2k-6)^2}}\\
&= \frac{k^2}{2k-6} \pm \sqrt{\frac{(k^2-6k)^2}{(2k-6)^2}}\\
&= \frac{k^2}{2k-6} \pm \frac{k^2-6k}{2k-6}\\
x_{E_1} &= \frac{k^2}{2k-6} + \frac{k^2-6k}{2k-6}\\
&= \frac{k^2+k^2-6k}{2k-6}\\
&= \frac{2k^2-6k}{2k-6}\\
&= \frac{k(2k-6)}{2k-6}\\
&= k\\
x_{E_2} &= \frac{k^2}{2k-6} - \frac{k^2-6k}{2k-6}\\
&= \frac{k^2-(k^2-6k)}{2k-6}\\
&= \frac{6k}{2k-6}\\
&= \frac{3k}{k-3}
\end{aligned}$$

2. Schritt: Gleichsetzen der potentiellen Extremstellen von f_k

Setze nun die beiden potentiellen Extremstellen x_{E_1} und x_{E_2} mit einander gleich. Wegen des Nenners von x_{E_2} wird hierbei wieder der Fall $k = 3$ nicht berücksichtigt, diesen musst du danach also noch separat betrachten.

$$\begin{aligned}
x_{E_1} &= x_{E_2}\\
k &= \frac{3k}{k-3} && \mid \cdot(k-3)\\
3k &= k\cdot(k-3) && \mid -3k\\
0 &= k^2-3k-3k\\
0 &= k(k-6) && \mid \text{Satz vom Nullprodukt} \Rightarrow k_1 = 0\\
0 &= k-6 && \mid +6\\
k_2 &= 6
\end{aligned}$$

Für die Fälle $k_1 = 0$ und $k_2 = 6$ hat f_k also eine Extremstelle. Für den Fall $k = 3$ hat f_k ein Maximum bei $x_{E_1} = k = 3$, welches du bereits im Aufgabenteil a) berechnet hast. Die zweite Extremstelle $x_{E_2} = \frac{3k}{k-3}$ ist allerdings für $k = 3$ nicht definiert. Daher hat f_k für $k = 3$ genau eine Extremstelle.
Die gesuchten Werte für den Parameter k, sodass f_k keine zwei Extremstellen besitzt lauten also $k_1 = 0$, $k_2 = 6$ und $k_3 = 3$.