a) ▶ **Symmetrie des Graphen begründen** (11P)

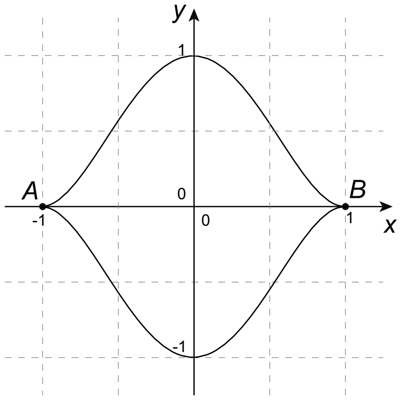
Du sollst anhand des Funktionsterms begründen, dass der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist.

Beim Graphen einer ganzrationalen Funktion, ist dies der Fall, wenn nur gerade Exponenten im Funktionsterm auftreten.

▶ **Funktionsgleichung von f aufstellen**

Du sollst einen Funktionsterm von f aufstellen und hast folgende Informationen gegeben:

1. Die Steigung des Graphen von f in den beiden Punkten A und B soll jeweils den Wert Null haben.
2. f soll folgende Form haben: $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$.



Du sollst also die Parameterwerte von a, b und c bestimmen. Dazu benötigst du drei Gleichungen, mit deren Hilfe du ein Gleichungssystem aufstellen kannst.

Dieses kannst du dann mit dem CAS lösen und so die Parameterwerte von a, b und c bestimmen. Zwei der drei Gleichungen kannst du aufstellen, indem du die Koordinaten zweier Punkte aus dem Schaubild abliest. Die dritte erhältst du mit Hilfe der Information 1.

▶ **Funktionsgleichung von g aufstellen**

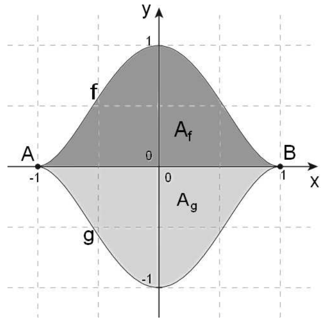
Nun sollst du einen Term der Funktion g aufstellen, deren Graph durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse entsteht.

Soll der Graph einer Funktion f an der x-Achse gespiegelt werden, so bedeutet das für den Funktionsterm von g:
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $g(x) = -f(x)$.

b) ▶ **Materialkosten berechnen** (10P)

Du sollst überprüfen, ob die Forderung eingehalten werden kann, dass die Materialkosten für das Logo höchstens 75 € betragen sollen, wenn das Material 34 € je Quadratmeter kostet. Dazu sollst du die gesamten Materialkosten K berechnen:

$K = A \cdot P$, wobei A der Flächeninhalt des Logos und P der Preis pro Quadratmeter ist.
Dabei gilt: $A = A_f + A_g$, wie du auf dem Schaubild rechts sehen kannst. Wegen der Symmetrie von f und g gilt: $\left|A_f\right| = \left|A_g\right| \Rightarrow A = 2 \cdot A_f$



Berechne also zuerst den Inhalt der Fläche A_f und darüber den Flächeninhalt A. Anschließend kannst du die Materialkosten berechnen.

► Größte Steigung des oberen Randes berechnen

Du sollst nun überprüfen, ob die Forderung erfüllt werden kann, dass die größte Steigung des oberen Randes des Logos mindestens $1,5$ betragen soll.

Der obere Rand des Logos wird durch den Graphen der Funktion f dargestellt. Das bedeutet, du sollst überprüfen, ob die maximale Steigung des Graphen von f zwischen den beiden Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ mindestens $1,5$ beträgt. Die Steigung des Graphen von f wird durch die erste Ableitung f' von f beschrieben.

Berechne also das Maximum von f' und vergleiche es mit dem geforderten Wert. Überprüfe anschließend, ob dies zwischen den beiden Nullstellen von f liegt.

Maximum berechnen

Für eine Maximalstelle x_M der Funktion f' gibt es zwei Kriterien:

- **Das notwendige Kriterium**: $f''(x_M) = 0$.
- **Das hinreichende Kriterium**: $f'''(x_M) < 0$.

Gehe also wie folgt vor:

- 1. Schritt: Bilde $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ im CAS.
- 2. Schritt: Wende das notwendige Kriterium an, um mögliche Maximalstellen von f' zu ermitteln.
- 3. Schritt: Überprüfe das hirneichende Kriterium für die möglichen Maximalstellen.
- 4. Schritt: Berechne die maximale Steigung $f'(x_M)$.

c) **► Geraden in das Koordinatensystem einzeichnen** (13P)

Das Logo soll durch die beiden Geraden $g_1(x) = x$ und $g_2(x) = -x$ in vier Flächenstücke geteilt werden. Du sollst nun die beiden Geraden g_1 und g_2 in das Koordinatensystem in der Anlage zeichnen.

Aus den Funktionstermen der Geraden kannst du den y-Achsenabschnitt, sowie die Steigung ablesen. Eine Gerade g mit dem Funktionsterm $g(x) = a \cdot x + b$ hat die Steigung a und den y-Achsenabschnitt b.

Über die Geraden $g_1(x) = x$ hast du demnach folgende Informationen gegeben:

- Die Steigung ist 1.
- Der y-Achsenabschnitt ist 0.

Die Gerade g_1 hat demnach die Eigenschaft: $y = x$ für alle Punkte auf der Geraden g_1. Demnach ist g_1 die Winkelhalbierende des Schnittwinkels der beiden Koordinatenachsen im 1. und 3. Quadranten.

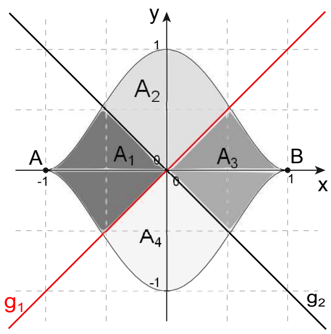
Für die Gerade $g_2(x) = -x$ gilt entsprechend:

- Die Steigung ist -1.
- Der y-Achsenabschnitt ist 0.

Die Gerade g_2 hat demnach die Eigenschaft: $y = -x$ für alle Punkte auf der Geraden g_2. Demnach ist g_2 die Winkelhalbierende des Schnittwinkels der beiden Koordinatenachsen im 2. und 4. Quadranten.

▶ Größe der Flächenstücke berechnen

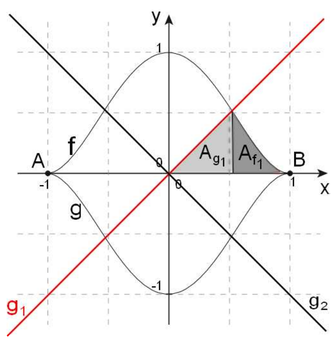
Du sollst nun, die Größe der vier Flächenstücke A_1, A_2, A_3 und A_4 berechnen, die rechts in der Grafik eingezeichnet sind.
Du hast folgende Informationen:



- Die Graphen von f und g sind symmetrisch zur y-Achse.
- Der Graph von g entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse.
- Anhand der Funktionsterme kannst du sehen, dass für die Geraden g_1 und g_2 ebenfalls gilt $g_1(x) = -g_2(x)$. Die Gerade g_1 entsteht also durch Spiegelung der Geraden g_2 an der x-Achse bzw. an der y-Achse.

Daraus folgt:
- $A_1 = A_3$
- $A_2 = A_4$

A_1 und A_3
Berechne zuerst den Flächeninhalt A_3 und damit auch den Flächeninhalt A_1.
Der Flächeninhalt A_3 setzt sich zusammen aus zwei Teilflächeninhalten. Den Inhalt der Teilfläche oberhalb der x-Achse und den der Teilfläche unterhalb der x-Achse.

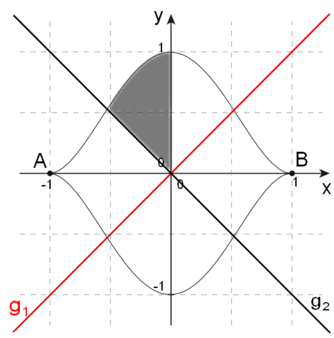


Wegen der Symmetrie des Logos, sind diese Teilflächen gleich groß. Berechne also zunächst nur den Inhalt der oberen Teilfläche und verdopple diesen anschließend. Die obere Teilfläche kannst du wieder in zwei Teilflächen aufteilen:

- A_{g_1}: Der Inhalt der Fläche zwischen der Geraden g_1 und der x-Achse vom Ursprung bis zum Schnittpunkt S_1 von g_1 mit dem Graphen von f.
- A_{f_1}: Der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse vom Schnittpunkt S_1 bis zur Nullstelle von f.

A_2 und A_4

Berechne nun den Flächeninhalt A_2 und damit auch den Flächeninhalt A_4. Das Flächenstück A_2 setzt sich ebenfalls aus zwei symmetrischen und damit gleichgroßen Flächenstücken zusammen: Das Teilstück links der y-Achse und das Teilstück rechts der y-Achse. Betrachte demnach zuerst nur das rechte Teilstück der Fläche A_2 und verdopple dessen Inhalt anschließend.



Bei dem Flächenstück rechts der y-Achse handelt es sich um die Fläche zwischen dem Graphen von f und dem Graphen von g_1 vom Ursprung bis zum Schnittpunkt S_1.

► Geradengleichung bestimmen

Du sollst Funktionsterme der Ursprungsgeraden aufstellen, die durch die Wendepunkte des Graphen von f verlaufen. Eine Ursprungsgerade u durch einen Punkt $P(x_P \mid y_P)$ hat allgemein die Form:

$u(x) = \frac{y_P}{x_P} \cdot x$.

Berechne zuerst die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f und setze diese anschließend in den oben stehenden Funktionsterm ein.

d) **► Abhängigkeit der x-Koordinaten zeigen** (10P)

Du sollst zeigen, dass für jedes k und $x > 0$ die x-Koordinate des Wendepunktes des Graphen von f_k immer dasselbe Vielfache der x-Koordinate des Tiefpunktes ist.

Die Funktionenschar f_k ist dir gegeben mit $f_k(x) = k \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 1$.

Berechne zuerst die x-Koordinaten der Tiefpunkte der Graphen von f_k (x_T) und anschließend die Koordinaten der Wendepunkte der Graphen von f_k (x_W).

Zeige anschließend, dass x_W immer dasselbe Vielfache von x_T ist.

Wenn dies der Fall ist, muss für ein konstantes a gelten: $a \cdot x_T = x_W$. Um die Behauptung zu zeigen, berechne also a und zeige so, dass a konstant ist, also nicht von k abhängt.