a) ▶ **Geradengleichungen u_1 und u_2 angeben** (9P)

Aus der Aufgabenstellung ist bekannt:

- U-Boot U_1 passiert die Punkte $P_0\,(4 \mid 14 \mid -4)$ und $P_1\,(6 \mid 11 \mid -4)$.
- U-Boot U_2 passiert die Punkte $Q_0\,(11 \mid 9 \mid -14)$ und $Q_1\,(9 \mid 6 \mid -12)$.

Eine Gerade g hat allgemein die Gleichung

$g : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{q}$,

wobei $\vec{p}$ der Stützvektor und $\vec{q}$ der Richtungsvektor ist. Wähle z.B. für die beiden Geraden $\overrightarrow{OP_0}$ bzw. $\overrightarrow{OQ_0}$ als **Stützvektor** und die Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ bzw. $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ als **Richtungsvektoren**.

1. Schritt: Geradengleichung für u_1

Der Stützvektor $\overrightarrow{OP_0}$ hat die Koordinaten $\overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Für den Richtungsvektor $\overline{P_0P_1}$ gilt:

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 11-14 \\ -4-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt die Gleichung der Geraden u_1 mit

$$u_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

2. Schritt: Geradengleichung für u_2

Der Stützvektor $\overrightarrow{OQ_0}$ hat die Koordinaten $\overrightarrow{OQ_0} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix}$.

Für den Richtungsvektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ gilt:

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = \overrightarrow{OQ_1} - \overrightarrow{OQ_0} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-11 \\ 6-9 \\ -12-(-14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es folgt die Gleichung der Geraden u_2 mit

$$u_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

▶ **Geschwindigkeiten der U-Boote nachweisen**

Überlege, was „Geschwindigkeit“ bedeutet: Sie gibt dir an, welche **Strecke** in welcher **Zeit** zurückgelegt wird. Aus der Aufgabenstellung weißt du:

- U-Boot U_1 legt die Strecke von P_0 zu P_1 in 1 Minute zurück.
- U-Boot U_2 legt die Strecke von Q_0 zu Q_1 in 1 Minute zurück.

Du kannst also so vorgehen:

- Berechne zunächst die Länge der Strecken $\overline{P_0P_1}$ und $\overline{Q_0Q_1}$.
- Eine Einheit im Koordinatensystem entsprechen 100 m. Multipliziere die Ergebnisse also mit 100, um die Länge in Meter zu erhalten.
- Diese Strecken legen die beiden U-Boote jeweils in 1 Minute zurück. Formuliere die Geschwindigkeit in Meter pro Minute.

1. Schritt: Streckenlängen berechnen

Die Länge einer Strecke entspricht dem Betrag des zugehörigen Vektors. Die Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ hast du bereits berechnet.

$$\begin{aligned}\overline{P_0P_1} = \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| &= \left|\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{2^2+(-3)^2+0^2} = \sqrt{4+9} \\ &= \sqrt{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Q_0Q_1} = \left|\overrightarrow{Q_0Q_1}\right| &= \left|\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{(-2)^2+(-3)^2+2^2} = \sqrt{4+9+4} \\ &= \sqrt{17}\end{aligned}$$

2. Schritt: Geschwindigkeit berechnen

1 LE im Koordinatensystem entspricht 100 m in der Wirklichkeit. Die U-Boote haben tatsächlich jeweils die 100-fache Strecke zurückgelegt und haben dafür je eine Minute gebraucht

U-Boot U_1 legt in einer Minute eine Strecke von $100 \cdot \sqrt{13}\,\text{m} \approx 361\,\text{m}$ zurück.
U-Boot U_2 legt in einer Minute eine Strecke von $100 \cdot \sqrt{17}\,\text{m} \approx 412\,\text{m}$ zurück.

Damit kannst du sagen:
U-Boot U_1 fährt mit einer Geschwindigkeit von $100 \cdot \sqrt{13}\,\frac{\text{m}}{\text{min}} \approx 361\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$.
U-Boot U_1 fährt mit einer Geschwindigkeit von $100 \cdot \sqrt{17}\,\frac{\text{m}}{\text{min}} \approx 412\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

▶ Begründen, dass u_1 und u_2 nicht parallel sind

Zwei Geraden sind parallel, wenn ihre Richtungsvektoren parallel verlaufen. Dies wiederum ist der Fall, wenn die Richtungsvektoren **Vielfache** voneinander sind.

Formal kannst du das so formulieren: Geraden u_1 und u_2 sind parallel, wenn für die Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ gilt:
$\overrightarrow{P_0P_1} = k \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1}$.

Prüfe nach, ob diese Gleichung erfüllt ist.

$$\overrightarrow{P_0P_1} = k \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k \\ -3k \\ 2k \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow k = -1 \\ \Rightarrow k = 1 \\ \Rightarrow k = 0 \end{matrix}$$

Es ergibt sich kein einheitlicher Wert für k. Deshalb sind die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander und die Geraden u_1 und u_2 sind nicht parallel.

▶ Kleinsten Abstand der U-Boote untersuchen

Hier ist wichtig, dass du die Aufgabenstellung genau liest: Es ist nicht nach dem kleinsten Abstand der **Geraden** u_1 und u_2 gefragt, sondern nach dem kleinsten Abstand der **U-Boote**.

Zu Beginn, um 12:21 Uhr, befindet sich U_1 in Punkt P_0 und U_2 in Punkt Q_0. Du weißt, dass sie sich geradlinig entlang des Richtungsvektors bewegen und die Strecke, die durch den Richtungsvektor beschrieben wird, in einer Minute zurücklegen.

Das heißt: Wenn du $r = 1$ in die Geradengleichungen einsetzt, so erhältst du die Position der U-Boote nach einer Minute; für $r = 2$ die Position nach zwei Minuten; für $r = 3$ die Position nach drei Minuten etc.

Die Geradengleichungen geben dir also an, in welcher Position sich U_1 bzw. U_2 nach r Minuten befinden.

Du kannst so vorgehen:

- Fasse die Geradengleichung jeweils in einem **Vektor** $\overrightarrow{OB_1}$ bzw. $\overrightarrow{OB_2}$. zusammen. Er beschreibt die Position, an der sich das jeweilige U-Boot nach r Minuten befindet.
- Gesucht ist der **kleinste Abstand** der beiden U-Boote. Berechne also den Abstand $\overline{B_1B_2}$. Er gibt dir an, wie weit die beiden U-Boote nach r Minuten voneinander entfernt sind.
- Untersuche, welchen kleinsten Wert dieser Abstand annehmen kann.

1. Schritt: Position der U-Boote als Vektor formulieren

U-Boot U_1 befindet sich nach r Minuten im Punkt B_1 mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OB_1} = \begin{pmatrix} 4+2r \\ 14-3r \\ -4 \end{pmatrix}$.

U-Boot U_2 befindet sich nach r Minuten im Punkt B_2 mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OB_2} = \begin{pmatrix} 11-2r \\ 9-3r \\ -14+2r \end{pmatrix}$.

2. Schritt: Abstand der U-Boote berechnen

Die U-Boote befinden sich nach r Minuten in den Punkten B_1 und B_2. Der Abstand der beiden U-Boote ist dann der Abstand der beiden Punkte und somit auch die Länge der Strecke $\overline{B_1B_2}$:

$$\begin{aligned}
\overline{B_1B_2} = \left|\overrightarrow{B_1B_2}\right| &= \left|\overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OB_1}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 11-2r \\ 9-3r \\ -14+2r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+2r \\ 14-3r \\ -4 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 11-2r-(4+2r) \\ 9-3r-(14-3r) \\ -14+2r-(-4) \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 11-2r-4-2r \\ 9-3r-14+3r \\ -14+2r+4 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 7-4r \\ -5 \\ -10+2r \end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{(7-4r)^2+(-5)^2+(-10+2r)^2} \\
&= \sqrt{49-2\cdot 7\cdot 4r+(4r)^2+25+100-2\cdot 10\cdot 2r+(2r)^2} \\
&= \sqrt{49-56r+16r^2+25+100-40r+4r^2} \\
&= \sqrt{174-96r+20r^2}
\end{aligned}$$

Für den Abstand der beiden U-Boote nach r Minuten ergibt sich der Term $\sqrt{20r^2-96r+174}$.

3. Schritt: Minimalen Abstand berechnen

Wir wollen den Abstand d der beiden U-Boote als Funktion d mit $d(r) = \sqrt{20r^2-96r+174}$ auffassen. Gesucht ist der minimale Abstand, also der kleinste Funktionwert von d. Berechne deshalb das **Minimum** von d.

Dabei ist wichtig: Eine Wurzel nimmt dann den kleinsten Wert an, wenn der Radikand (der Ausdruck unter der Wurzel) den kleinsten Wert annimmt. Berechne also das Minimum von f mit $f(r) = 20r^2-96r+174$.

Die ersten beiden Ableitungen von f sind $f'(r) = 40r-96$ und $f''(r) = 40$.

Setze $f'(r) = 0$, um die potentiellen Extremstellen von f zu berechnen:

$$\begin{aligned}
40r-96 &= 0 \qquad | +96 \\
40r &= 96 \qquad | :40 \\
r &= 2,4
\end{aligned}$$

Einsetzen in die zweite Ableitung ergibt: $f''(2,4) = 40 > 0$. Also liegt an dieser Stelle ein **Tiefpunkt** vor.

Berechne mit $d(2,4)$ den kleinsten Abstand der beiden U-Boote:

$d(2,4) = \sqrt{20\cdot(2,4)^2-96\cdot 2,4+174} = \sqrt{58,8} \approx 7,67.$

Eine LE im Koordinatensystem entspricht 100 m in der Realität. Also können sich die beiden U-Boote **höchstens** auf 767 m nahe kommen. Damit folgt:

Die beiden U-Boote können sich auf ihren Kursen maximal 767 m nahe kommen. Sie kommen sich also nicht näher als 500 m.

b) ▶ **Entfernung von U_2 und Kreuzfahrtschiff untersuchen** (11P)

Laut Aufgabenstellung liegt die Meeresoberfläche in der x-y-Ebene. Der Punkt, in dem das U-Boot U_2 die Meeresoberfläche erreicht, ist also der Punkt, in dem die Gerade u_2 die x-y-Ebene durchstößt.

Alle Punkte in der x-y-Ebene haben die z-Koordinate $z = 0$. Berechne also den Punkt auf der Geraden u_2, für den gilt: $z = 0$.

Du kannst so vorgehen:

- Der Punkt, in dem das U-Boot U_2 an die Meeresoberfläche kommt, sei der Punkt M. Er hat allgemein die Koordinaten $M\,(m_1 \mid m_2 \mid 0)$. Setze diese Koordinaten in die Geradengleichung von u_2 ein und löse nach r auf.
- Bestimme dann die vollständigen Koordinaten von M.
- Berechne zuletzt den Abstand der Punkte M und K.

1. Schritt: Punkt M berechnen

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus der dritten Zeile folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= -14 + 2r && \mid +14 \\ 14 &= 2r && \mid :2 \\ r &= 7 \end{aligned}$$

Setze $r = 7$ ein in die Geradengleichung von u_2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-14 \\ 9-21 \\ -14+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das U-Boot U_2 erreicht die Meeresoberfläche im Punkt $M\,(-3 \mid -12 \mid 0)$.

2. Schritt: Abstand von M und K berechnen

Gesucht ist der Abstand des U-Bootes U_2 an der Meeresoberfläche und dem Kreuzfahrtschiff, das in Punkt $K\,(45 \mid 2 \mid 0)$ ankert. Berechne also die Länge der Strecke $\overline{MK}$.

$$\begin{aligned} \overline{MK} = \left|\overrightarrow{MK}\right| &= \left|\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 45 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 45-(-3) \\ 2-(-12) \\ 0-0 \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 48 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \end{aligned}$$

$$= \sqrt{48^2 + 14^2}$$
$$= \sqrt{2.500} = 50$$

Eine LE im Koordinatensystem entspricht 100 m in der Wirklichkeit. Also sind das U-Boot U_2 und das Kreuzfahrtschiff insgesamt $50\,\text{m} \cdot 100 = 5.000\,\text{m} = 5\,\text{km}$ voneinander entfernt, wenn das U-Boot U_2 die Meeresoberfläche erreicht.

c) **▶ Abstand von allgemeinem Punkt X und F angeben** (7P)

Der Punkt X soll ein allgemeiner Punkt auf der Geraden u_1 sein. Seine Koordinaten folgen aus der Geradengleichung der Gerade u_1:

$X\,(4 + 2r \mid 14 - 3r \mid -4)$.

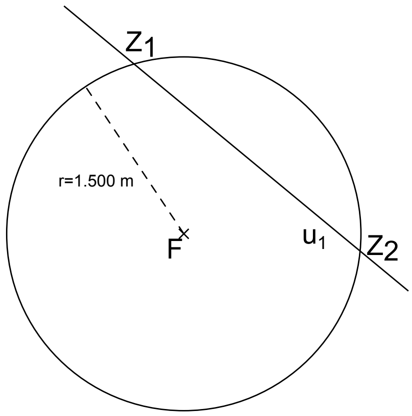
Gesucht ist der Abstand der Punkte X und F. Berechne also die Länge der Strecke $\overline{XF}$.

$$\begin{aligned}
\overline{XF} = \left|\overrightarrow{XF}\right| &= \left|\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OX}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+2r \\ 14-3r \\ -4 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 18-(4+2r) \\ 6-(14-3r) \\ 7-(-4) \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 18-4-2r \\ 6-14+3r \\ 7+4 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 14-2r \\ -8+3r \\ 11 \end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{(14-2r)^2 + (-8+3r)^2 + (11)^2} \\
&= \sqrt{14^2 - 2\cdot 14\cdot 2r + (2r)^2 + (-8)^2 - 2\cdot 8\cdot 3r + (3r)^2 + 121} \\
&= \sqrt{196 - 56r + 4r^2 + 64 - 48r + 9r^2 + 121} \\
&= \sqrt{381 - 104r + 13r^2} \\
&= \sqrt{13r^2 - 104r + 381}
\end{aligned}$$

Der Abstand eines allgemeinen Punktes X auf der Geraden u_1 vom Punkt F beträgt $\sqrt{13r^2 - 104r + 381}$.

▶ Punkte bestimmen, wo Übertragung noch möglich ist

Eine Skizze der Situation kann dir bei der Lösung dieser Aufgabe helfen:



Der Bereich, in dem sich das U-Boot U_1 befinden muss, um noch eine Nachricht an die Station senden zu können, kann als **Kreis** mit einem Radius von 1.500 m dargestellt werden. Die beiden Punkte, an denen eine Übertragung gerade noch möglich ist, sind die beiden Schnittpunkte von Kreis und Gerade. Wir haben sie in nebenstehender Abbildung mit Z_1 und Z_2 bezeichnet.

Diese beiden Punkte liegen auf der Geraden u_1 und haben vom Punkt F einen Abstand von 1.500 m. Da eine LE im Koordinatensystem 100 m in der Wirklichkeit entspricht, sind diese beiden Punkte vom Punkt F 15 LE entfernt.

Den Abstand, den ein beliebiger Punkt X auf der Geraden u_1 vom Punkt F hat, hast du soeben bestimmt. Dieser Abstand soll nun 15 LE betragen. Du kannst so vorgehen:

- Setze den Term für den allgemeinen Abstand gleich 15.
- Löse diese Gleichung nach r. Du erhältst zwei Lösungen r_1 und r_2.
- Setze r_1 und r_2 anschließend in die Geradengleichung von u_1 ein, um die Koordinaten der beiden Punkte Z_1 und Z_2 zu erhalten.

1. Schritt: Parameterwerte für *r* ermitteln

$$
\begin{aligned}
\sqrt{13r^2-104r+381} &= 15 && \mid (\,)^2\\
13r^2-104r+381 &= 225 && \mid -225\\
13r^2-104r+156 &= 0
\end{aligned}
$$

Du kannst diese Gleichung mit der *abc*-Formel oder mit der *p*-*q*-Formel lösen.

abc-Formel

$$
\begin{aligned}
r_{1,2} &= \frac{-(-104)\pm\sqrt{(-104)^2-4\cdot 13\cdot 156}}{2\cdot 13}\\
&= \frac{104\pm\sqrt{10.816-8.112}}{26}\\
&= \frac{104\pm\sqrt{2.704}}{26}\\
&= \frac{104\pm 52}{26}\\
r_1 &= 6\\
r_2 &= 2
\end{aligned}
$$

p-*q*-Formel

$$
\begin{aligned}
13r^2-104r+156 &= 0 && \mid :13\\
r^2-8r+12 &= 0\\
r_{1,2} &= -\frac{-8}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2-12}\\
&= 4\pm\sqrt{16-12}\\
&= 4\pm\sqrt{4}\\
&= 4\pm 2\\
r_1 &= 6\\
r_2 &= 2
\end{aligned}
$$

Es ergeben sich die Werte $r_1 = 6$ und $r_2 = 2$.

2. Schritt: Koordinaten der Punkte bestimmen

Setze $r_1 = 6$ und $r_2 = 2$ in die Geradengleichung von u_1 ein und erhalte so die Koordinaten der beiden Punkte Z_1 und Z_2.

$$\overrightarrow{OZ_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+12 \\ 14-18 \\ -4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OZ_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ 14-6 \\ -4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Die beiden Punkte, in denen eine Übermittlung gerade noch möglich ist, sind $Z_1\,(16 \mid -4 \mid -4)$ und $Z_2\,(8 \mid 8 \mid -4)$.

▶ Zeitfenster angeben, in dem Übertragung möglich ist

Du weißt, dass das U-Boot U_1 die durch den Richtungsvektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ beschriebene Strecke in einer Minute zurücklegt und dass es sich um 12:21 Uhr im Punkt P_0 befindet. Für $r = 2$ erhältst du also die Position nach zwei Minuten um 12:23 Uhr, für $r = 3$ nach drei Minuten um 12:24 Uhr etc.

Du hast eben berechnet, dass eine Übertragung zu den Zeitpunkten $r = 2$ und $r = 6$ **gerade noch** möglich ist. Also ist im Bereich $2 \leq r \leq 6$ eine Übertragung möglich. Im Sachzusammenhang interpretiert heißt das:

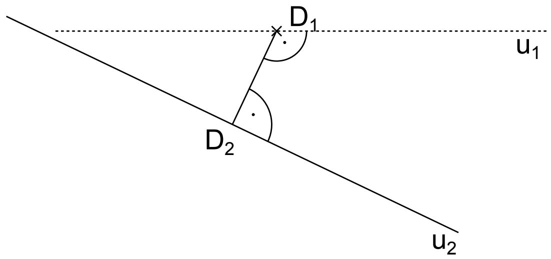
Zwischen 12:23 Uhr und 12:27 Uhr ist eine Übertragung möglich.

d) **▶ Lösungsweg zur Berechnung der Koordinaten von D_2 entwickeln** (3P)

Aus der Aufgabenstellung weißt du:

- Es gibt einen Punkt auf der Geraden u_1, nämlich D_1, in dem der Abstand der Geraden u_1 und u_2 minimal wird.
- Gesucht ist nun der Punkt D_2 auf der Geraden u_2, in dem ebenfalls der Abstand der Geraden u_1 und u_2 minimal wird.

Der Abstand von einem Punkt zu einer Geraden wird immer **senkrecht** zur Geraden gemessen. Der Abstand kann also dargestellt werden, indem man das **Lot** von D_1 auf die Gerade u_2 fällt. Da der Abstand von u_1 und u_2 im Punkt D_1 minimal wird, steht dieses Lot auch senkrecht auf u_1. Dabei gibt es einen **Lotfußpunkt** auf der Geraden u_2. Der minimale Abstand der Geraden ist also zugleich der Abstand von D_1 zum Lotfußpunkt. Also ist der Lotfußpunkt auch der Punkt auf u_2, welcher den kleinsten Abstand zum Kurs u_1 hat und damit unser gesuchter Punkt D_2.



Eine möglicher Lösungsweg ist also dieser:

1. Bestimme die Gleichung einer Hilfsebene H, welche den Punkt D_1 enthält und senkrecht zur Geraden u_1 verläuft. Verwende dazu eine Ebenengleichung in Normalenform mit Stützvektor $\overrightarrow{OD_1}$. Der Normalenvektor der Hilfsebene H ist der Richtungsvektor der Gerade u_1.

2. Berechne den Schnittpunkt S der Hilfsebene H mit der Geraden u_2. Der Verbindungsvektor von S und D_1 liegt in der Ebene H. Deshalb steht dieser Verbindungsvektor senkrecht auf der Geraden u_1. Da der Abstand von u_1 zu u_2 im Punkt D_1 minimal wird, steht dieser Verbindungsvektor auch senkrecht auf der Geraden u_2. Also ist der Schnittpunkt S unser gesuchter Punkt D_2.

Alternativ kannst du auch diesen Lösungsweg wählen:

1. Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{D_1D_2}$ soll senkrecht auf beide Geraden u_1 und u_2 stehen. Mit dem **Vektorprodukt** der Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{Q_0Q_1}$ erhältst du solch einen Vektor. Wir nennen ihn $\vec{n}$.

2. Bestimme eine Hilfsgerade h, welche durch den Punkt D_1 verläuft und den Vektor $\vec{n}$ als Richtungsvektor hat. h steht senkrecht auf u_1 und u_2 und verläuft durch D_1.

3. Berechne den Schnittpunkt S der Hilfsgeraden h mit der Geraden u_2. Mit der gleichen Begründung wie oben ist dieser Schnittpunkt dann unser gesuchter Punkt D_2.